

关于等势圆切线上的势函数 以及“上坡流动”错觉的几何机制

Ivan Borisovich Kurpishev
Independent Researcher, Kaliningrad
me@kurpishev.ru

2026

摘要

本文研究欧几里得平面上的一个简单中心场模型，其中势函数只依赖于点到固定中心的距离。我们证明：这样的势函数限制在等势圆的任一切线上时，会在切点处取得严格最大值。因此，沿切线方向，势函数增加的方向始终指向切点，而不是指向更远处的可见高点。随后，本文把这一精确的几何事实与常被描述为“液体向上坡流动”的视觉错觉区分开来。该错觉的原因并不是引力规律被破坏，而是观察者的视线信息不完整：真实剖面中的一个更低点被遮蔽后，观察者会对坡度方向作出错误判断。

1 引言

考虑如下情形：给定一个以点 O 为中心的中心场、一条等势圆 S_{r_0} 、圆上的切点 O' ，以及该点处的切线 l 。在线 l 上取两点 A 与 B ，并令它们位于 O' 的两侧。

自然会出现两个问题：

- 1) 势函数沿切线 l 如何变化；
- 2) 为什么在实际观察中，尽管数学模型并不预言这种行为，人们却仍可能产生“道路上坡”或“液体上坡流动”的印象。

第一个问题是纯几何问题。第二个问题属于解释与感知层面：必须区分真实剖面与观察者实际看到的剖面。

2 数学模型

定义 2.1. 设 \mathbb{R}^2 为欧几里得平面， O 为其中一个固定点。给定标量函数

$$\Phi(X) = f(|OX|),$$

其中 $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为严格递减函数。因此， Φ 仅依赖于点 X 到中心 O 的距离。

假设 2.2. 对每个 $r > 0$ ，圆

$$S_r = \{X \in \mathbb{R}^2 : |OX| = r\}$$

都是等势的，并且

$$r_1 < r_2 \implies \Phi|_{S_{r_1}} > \Phi|_{S_{r_2}}.$$

等价地说， Φ 的数值会随着到 O 的距离增大而严格减小。

定义 2.3. 固定一个数 $r_0 > 0$ 、圆 S_{r_0} 以及一点 $O' \in S_{r_0}$ 。记 l 为圆 S_{r_0} 在点 O' 处的切线。在线 l 上取两点 A, B ，并令它们位于 O' 的两侧。

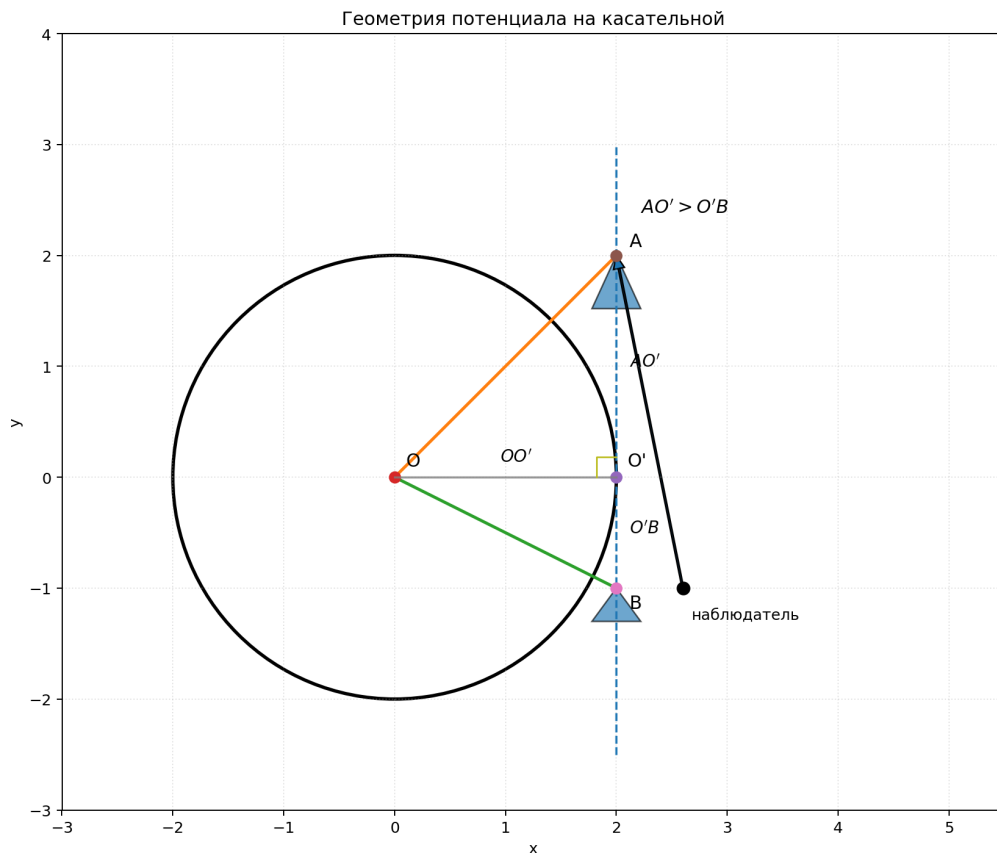


图 1: 切线上的势函数几何。对切线上的所有点而言, O' 是离中心 O 最近的点, 因此受限势函数 $\Phi|_l$ 在 O' 处取得最大值。

引理 2.4. 对任意点 $X \in l$, 都有

$$|OX|^2 = |OO'|^2 + |XO'|^2 = r_0^2 + |XO'|^2.$$

因此, 若 $X, Y \in l$ 且

$$|XO'| < |YO'|,$$

则

$$|OX| < |OY|.$$

证明. 由于半径 OO' 在点 O' 处垂直于切线 l , 三角形 XOO' 在 O' 处为直角三角形。由勾股定理,

$$|OX|^2 = |OO'|^2 + |XO'|^2 = r_0^2 + |XO'|^2.$$

于是 $|OX|$ 随着 $|XO'|$ 的增大而严格增大。 □

定理 2.5 (切线上的势函数). 设 $X, Y \in l$ 。若

$$|XO'| < |YO'|,$$

则

$$\Phi(X) > \Phi(Y).$$

特别地, 受限势函数 $\Phi|_l$ 在切点 O' 处取得严格最大值。

证明. 由引理 2.4 可知, $|XO'| < |YO'|$ 推出 $|OX| < |OY|$ 。由于 $\Phi(X) = f(|OX|)$ 且 f 为严格递减函数, 因此

$$\Phi(X) > \Phi(Y).$$

当 $X = O'$ 时, $|XO'| = 0$, 所以对任意 $Y \in l \setminus \{O'\}$ 都有

$$\Phi(O') > \Phi(Y).$$

□

推论 2.6. 若点 A 与 B 满足

$$|AO'| > |BO'|,$$

则

$$|OA| > |OB|, \quad \Phi(A) < \Phi(B) < \Phi(O').$$

注记 2.7. 推论 2.6 给出了关键结论: 如果点 A 比点 B 更远离切点 O' , 那么在一个中心递减场中, A 处的势函数值一定小于 B 处的势函数值。因此, 仅凭切线几何本身, 不能推出液体会沿切线从 B 自发流向更远的高点 A 。

3 错觉的几何机制

定理 2.5 描述的是势函数的真实分布。然而, 人类感知并不掌握完整剖面, 而只依赖于可见的那一部分。如果道路上的更低点被遮挡, 那么观察者对可见轮廓的解释就可能出错。

图 2 展示了这一情形。观察者位于 B 附近, 能够看到远处的高点 A , 却看不到靠近 O' 的隐藏低点。在这种构型下, 对“左边可见高度”与“右边可见高度”的比较就不再可靠, 因为真实剖面包含一个未被视觉控制的凹陷。

Схема визуальной иллюзии: скрытая впадина и ложное восприятие уклона

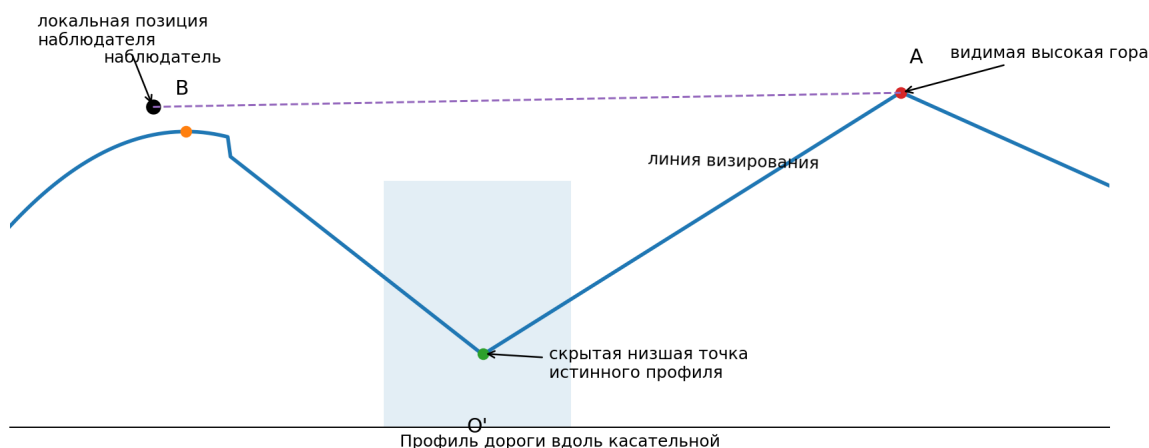


图 2: 视觉错觉示意图。观察者能够看到远处高点 A , 却看不到靠近 O' 的隐藏低点。因此, 真实的下坡方向可能被误判为上坡。

注记 3.1. 因此, 这种错觉的几何原因并不是场的方向发生了改变, 而是观察者只比较了视线能够覆盖到的剖面片段, 却没有看到相关区间上的全局低点。

4 物理解释

把点 O 解释为行星中心，把函数 Φ 解释为一个随离心距离增大而严格减小的标量。那么，各圆 S_r 就是等势线，而切点 O' 则是沿切线方向势函数取最大值的特殊点。因此，物理上正确的结论是：

- 中心场的数学模型并不预言沿切线从较近点自发运动到更远高点；
- 所谓“上坡流动”或“道路上升”的观测，应归入透视错觉或可见性错觉；
- 要解释这种错觉，必须分析可见剖面，而不能只依赖观察者附近的局部视觉印象。

5 结论

本文建立了两个彼此分开的结论。

第一，对于任意形如

$$\Phi(X) = f(|OX|)$$

且 f 严格递减的中心场，势函数在等势圆切线上的限制一定在切点处取得严格最大值。这给出了比较切线上各点的精确规则：点离 O' 越远， Φ 的值越小。

第二，看似违反“正常下坡方向”的现象，应当单独解释为一种视觉错觉，其原因是剖面中的隐藏低点。因而，这一现象并不意味着引力规律被破坏，而是反映了真实几何与不完整观测图像之间的差别。

Copyright © Ivan Borisovich Kurpishev, 2026.

允许引用，但必须明确注明作者。