

A Measurement Model for the Kurpishev Uncertainty Principle PN.2

Hidden Bracketing Alternatives, Information Distinguishability, and Total-Variation-Corrected Minimax Bounds



I. B. Kurpishev

Ivan Borisovich Kurpishev

Independent Researcher, Kaliningrad, Russia

ivan-kurpishev@yandex.ru · <https://kurpishev.com>

Authorial journal manuscript v1.0 · 22 August 2026

Abstract

A rigorous information-and-measurement model is developed for the mathematical Kurpishev Uncertainty Principle PN.2. The construction closes the mathematical part of proof obligation PO-6 while leaving physical operationalization explicitly open. For two admissible bracketings b_L and b_R in a normed nonassociative algebra, we introduce a measurable experimental record, the σ -algebra of data available to an estimator before the true branch is unblinded, and a distinguishability coefficient τ_u given by the total variation distance between the laws of the accessible data. A classical two-point minimax lemma then yields total-variation-corrected lower bounds for reconstruction risks of a scalar observable S , the structural coordinate $\mathfrak{D}$, and the full algebraic result. Under perfect hiding, $\tau_u=0$, the bounds reduce exactly to the deterministic PN.2 coefficients; under perfect distinguishability, $\tau_u=1$, the information-theoretic lower bound correctly vanishes. A separate metrological bridge is formalized: e_S , e_D , and e_R are reconstruction errors of mathematical targets, not physical measurement uncertainties. Conversion to measurable quantities requires explicit calibration maps, units, reference values, and an uncertainty budget. The resulting status firewall separates the proved mathematical theorem from any future physical realization of $R \cdot R$ and from Robertson–Schrödinger dispersion relations or Ozawa noise–disturbance relations.

Keywords: nonassociative algebra; associator; Kurpishev PN.2; minimax risk; hidden alternative; total variation; statistical experiment; measurement model; metrology

MSC 2020: 62C20; 17A01.

Scientific novelty and the boundary of the novelty claim

The novelty claimed in this paper is strictly internal to the formal PN.2 program. It does not concern the classical Le Cam two-point method, total variation distance, or VIM/GUM metrological terminology. The contribution is their type-consistent integration into PN.2 as a solution of the mathematical part of proof obligation PO-6.

- The hidden bracketing index b is replaced by a verifiable information condition: a pre-unblinding accessible σ -algebra and a distinguishability coefficient τ_u are specified.
- The deterministic errors e_S , e_D , e_R are embedded in a statistical experiment with minimax-type risks R_S , R_D , R_R .
- Total-variation-corrected forms PN.2-M-S and PN.2-M-R are proved with the factor $(1-\tau_u)^2$, explicitly accounting for information leakage about the branch.
- The deterministic PN.2 is recovered as the perfect-hiding limit $\tau_u=0$, whereas $\tau_u=1$ correctly forces the information-theoretic lower bound to vanish.
- A metrological firewall separates abstract reconstruction error from physical measurement error and measurement uncertainty; translation requires explicit calibration and reference models.

Priority boundary

No priority is claimed for classical statistical decision methods, total variation, or JCGM terminology. The authorial novelty claim is limited to the PN.2 architecture, the formulation of PO-6, and the resulting total-variation-corrected PN.2 within that architecture.

1. Introduction

The canonical PN.2 theorem package considers two admissible bracketings in a normed, generally nonassociative algebra. If the same input $u=(x,y,z)$ admits two outcomes r_L and r_R and a single estimator cannot use the true bracketing index b , two-point geometry yields a positive minimax reconstruction error whenever the targets are separated. This is already a rigorous mathematical theorem, but it is not yet a measurement model.

Proof obligation PO-6 appears precisely at the transition from the abstract rule “do not use b ” to an experiment. Merely omitting the label b is not sufficient: instrument data may reveal the branch. A measurement model must therefore specify what the estimator observes, when its output is frozen, how distinguishable the accessible branch-dependent laws are, and how mathematical reconstruction errors relate to metrological quantities.

The purpose of this paper is to build that bridge without promoting the physical status of PN.2. The principal result is a theorem of statistical decision theory for a two-alternative experiment. A physical realization of $R \star R$, calibration of $\mathfrak{D}$, a relation to $\hbar$, and a connection to quantum theory remain separate testable hypotheses.

2. Algebraic core of PN.2

2.1. Two bracketing alternatives

Let $\mathcal{A}$ be a normed real or complex linear space with a bilinear product $\odot$. For $u=(x,y,z) \in \Omega \subset \mathcal{A}^3$ define the two admissible protocols

$$b_L(u)=(x \odot y) \odot z, \quad b_R(u)=x \odot (y \odot z).$$

Write $r_L(u)=b_L(u)$ and $r_R(u)=b_R(u)$. The associator is

$$K(u)=r_L(u)-r_R(u)=(x \odot y) \odot z - x \odot (y \odot z).$$

Let $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ be a scalar observable and $\mathfrak{D}: \{b_L, b_R\} \rightarrow \mathbb{R}$ a structural coordinate of the protocol. Define

$$\Delta_S(u)=|S(r_L(u))-S(r_R(u))|, \quad \Delta_D=|\mathfrak{D}(b_L)-\mathfrak{D}(b_R)|,$$

$$\Delta_R(u)=||r_L(u)-r_R(u)||=||K(u)||.$$

At this stage $\mathfrak{D}$ is a mathematical protocol coordinate. A physical interpretation does not follow from notation and requires separate closure of the relevant proof and calibration obligations.

2.2. Deterministic baseline

If the estimator must output one pair $(\hat{s}, \hat{d})$ without using b , the canonical package defines

$$e_S(u; \hat{s})=\max\{|\hat{s}-S(r_L(u))|, |\hat{s}-S(r_R(u))|\},$$

$$e_D(u; \hat{d})=\max\{|\hat{d}-\mathfrak{D}(b_L)|, |\hat{d}-\mathfrak{D}(b_R)|\}.$$

For a full-state estimate $\hat{r} \in \mathcal{A}$,

$$e_R(u; \hat{r})=\max\{||\hat{r}-r_L(u)||, ||\hat{r}-r_R(u)||\}.$$

The two-point metric inequality gives $e_S \geq \Delta_S/2$, $e_D \geq \Delta_D/2$, and $e_R \geq \|K\|/2$, hence the canonical product bounds with coefficient 1/4. This description represents a measurement experiment only when the pre-output data do not carry branch-dependent information usable by the estimator.

3. Information-and-measurement experiment

3.1. Accessible σ -algebra

For fixed u let $(\mathcal{Z}, \mathcal{F})$ be the measurable space of the full experimental record. Under branch $b \in \{L, R\}$, the record Z has law $P_{\{u, b\}}$. Before unblinding, the estimator is restricted to a σ -algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. The choice of $\mathcal{G}$ is part of the preregistered protocol.

Allowed before output freeze	Forbidden before output freeze
input u and domain Ω	true branch label b
published $\odot$, S , and $\mathfrak{D}$	sealed branch-selection log
instrument and calibration parameters	reference values computed after unblinding
authorized portion of raw record Z	post-unblinding processing that uses b
branch-independent random seed	model adaptation after viewing the true branch

Thus “ b is hidden” is an information constraint on measurable data, not a psychological statement about the observer.

3.2. Quantitative hiding

The absence of an explicit label b does not imply identical observable distributions. Define the distinguishability coefficient

$$\tau_u := \text{TV}(P_{\{u, L\}}|_{\mathcal{G}}, P_{\{u, R\}}|_{\mathcal{G}}) \in [0, 1].$$

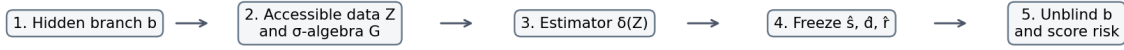
Equivalently define $h_u = 1 - \tau_u$ as a hiding coefficient. Then $h_u = 1$ means perfect hiding, $0 < h_u < 1$ partial hiding, and $h_u = 0$ perfect distinguishability from the accessible record.

Critical refinement of PO-6

It is not enough to withhold the symbol b . If the accessible signal Z uniquely encodes the branch, then $\tau_u = 1$ and any information-theoretic lower bound must vanish. The original verbal condition “ b is hidden” did not distinguish this case.

3.3. Blinding and unblinding protocol

1. Before the run, fix Ω , both admissible protocols, S , $\mathfrak{D}$, the data channel, the accessible σ -algebra $\mathcal{G}$, the estimator, and the risk criterion.
2. Generate or select the true branch b by a mechanism inaccessible to the estimator before unblinding.
3. Generate the full experimental record Z and expose only information in $\mathcal{G}$ to the estimator.
4. Compute $\hat{s}$, $\hat{d}$ and/or $\hat{r}$ and freeze the output procedurally or cryptographically.
5. Unblind b only after the output is frozen, then compute branch-specific reference targets.
6. Score the errors/risks and report τ_u , or a statistically controlled upper bound on τ_u , as part of the experimental record.



The label b and post-unblinding data are unavailable before the estimate is frozen.

Figure 1. PN.2 measurement protocol: the estimate is frozen before b is unblinded.

4. Admissible estimators and risks

An admissible estimator is a preregistered $\mathcal{G}$ -measurable rule. External randomization is allowed if its random seed is independent of b and included in the information model. Any use of the unblinded branch before the output freeze is excluded.

$$\hat{s} = \delta_S(Z), \quad \hat{d} = \delta_D(Z), \quad \hat{r} = \delta_R(Z).$$

Define the worst-case expected absolute or metric reconstruction losses over the two branches:

$$R_S(u; \delta_S) = \max_{\{b \in \{L, R\}\}} E_{\{u, b\}} |\delta_S(Z) - s_b(u)|,$$

$$R_D(u; \delta_D) = \max_{\{b \in \{L, R\}\}} E_{\{u, b\}} |\delta_D(Z) - \mathfrak{D}(b)|,$$

$$R_R(u; \delta_R) = \max_{\{b \in \{L, R\}\}} E_{\{u, b\}} |\delta_R(Z) - r_b(u)|.$$

Taking an infimum over a specified estimator class yields the usual minimax risks, but the lower bounds below are stronger in formulation: they hold for every admissible estimator separately.

5. Two-point total-variation lemma

Lemma 1 (two-point minimax bound with total variation). Let P_0 and P_1 be probability laws on the same measurable space, θ_0 and θ_1 points of a metric space (Θ, d) , and δ any measurable estimator. Then

$$\max\{E_0 d(\delta, \theta_0), E_1 d(\delta, \theta_1)\} \geq \frac{1}{2} d(\theta_0, \theta_1) [1 - \text{TV}(P_0, P_1)].$$

Proof. Let $\mu = P_0 + P_1$ dominate both laws and let p_0, p_1 be the corresponding densities. For every observation z , the triangle inequality gives $d(\delta(z), \theta_0) + d(\delta(z), \theta_1) \geq d(\theta_0, \theta_1)$. Hence

$$\begin{aligned} & E_0 d(\delta, \theta_0) + E_1 d(\delta, \theta_1) \\ & \geq \int \min(p_0, p_1) [d(\delta, \theta_0) + d(\delta, \theta_1)] d\mu \\ & \geq d(\theta_0, \theta_1) \int \min(p_0, p_1) d\mu \\ & = d(\theta_0, \theta_1) [1 - \text{TV}(P_0, P_1)]. \end{aligned}$$

The maximum of two nonnegative numbers is at least half their sum. $\square$

This is a classical two-point device in statistical decision theory; the present paper does not claim novelty for the lemma itself.

6. Measurement theorem for PN.2

Theorem 2 (total-variation-corrected measurement PN.2). For fixed $u \in \Omega$, let the experiment of Section 3 be given and let $\tau_u = \text{TV}(P_{\{u, L\}}|_{\mathcal{G}}, P_{\{u, R\}}|_{\mathcal{G}})$. Then every admissible pair δ_S, δ_D satisfies

$$R_S(u; \delta_S) \geq \frac{1}{2} \Delta_S(u) (1 - \tau_u),$$

$$R_D(u; \delta_D) \geq \frac{1}{2} \Delta_D(u) (1 - \tau_u),$$

$$R_S(u; \delta_S) R_D(u; \delta_D) \geq \frac{1}{4} (1 - \tau_u)^2 \Delta_S(u) \Delta_D. \quad (\text{PN.2-M-S})$$

For a full-state estimate,

$$R_R(u; \delta_R) \geq \frac{1}{2} \|K(u)\| (1 - \tau_u),$$

$$R_R(u; \delta_R) R_D(u; \delta_D) \geq \frac{1}{4} (1 - \tau_u)^2 \|K(u)\| \Delta_D. \quad (\text{PN.2-M-R})$$

Proof. Apply Lemma 1 to the targets $S(r_L), S(r_R)$ in $\mathbb{R}$; to $\mathfrak{D}(b_L), \mathfrak{D}(b_R)$ in $\mathbb{R}$; and to r_L, r_R in the metric space $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$. In the last case the target separation is $\|r_L - r_R\| = \|K(u)\|$. Multiplying the nonnegative individual bounds yields the product inequalities. $\square$

6.1. Separating observable and uniform form

If S is c -separating on Ω , so that $\Delta_S(u) \geq c \|K(u)\|$, then

$$R_S R_D \geq (c/4) (1 - \tau_u)^2 \|K(u)\| \Delta_D. \quad (\text{PN.2-M-K})$$

If additionally $\tau_u \leq \bar{\tau} < 1$ throughout Ω and $\|K(u)\| \geq \varepsilon_- m(u)$, then

$$R_S R_D \geq (c \varepsilon_- \Delta_D / 4) (1 - \bar{\tau})^2 m(u). \quad (\text{PN.2-M-U})$$

A uniform measurement constant therefore requires both algebraic nondegeneracy and information nondegeneracy. A large associator alone cannot create a measurement lower bound when the accessible data perfectly reveal the branch.

6.2. Deterministic PN.2 as a special case

If the accessible pre-output record has the same law under b_L and b_R , then $\tau_u = 0$. In particular, if the estimate is computed only from u and the published model, without any branch-dependent signal, Theorem 2 gives

$$R_S \geq \Delta_S / 2, \quad R_D \geq \Delta_D / 2, \quad R_R \geq \|K\| / 2,$$

exactly reproducing the canonical deterministic coefficients. If $\tau_u = 1$, the branches are perfectly distinguishable from the authorized data and the additional information-theoretic lower bound vanishes. This is not a contradiction of PN.2 but a different information regime.

7. Illustrative partially hidden channel

Consider a purely statistical example with no claim of being a physical realization of $R \star R$. Encode the hidden branch as $b \in \{-1, +1\}$. The estimator observes a binary indicator Z that equals the true branch with probability $1-p$ and is flipped with probability p , where $0 \leq p \leq 1/2$.

$$P(Z=b|b)=1-p, \quad P(Z=-b|b)=p.$$

For the two resulting Bernoulli laws on $\{-1, +1\}$,

$$\tau = \text{TV}(P_L, P_R) = 1 - 2p, \quad 1 - \tau = 2p.$$

Therefore

$$R_S R_D \geq p^2 \Delta_S \Delta_D,$$

$$R_R R_D \geq p^2 \|K\| \Delta_D.$$

At $p=1/2$ the indicator is independent of b , $\tau=0$, and the canonical coefficient $1/4$ is recovered. At $p=0$ the indicator reveals the branch without error, $\tau=1$, and the information bound vanishes. The example shows why the degree of hiding belongs in the experimental passport rather than remaining an implicit verbal assumption.

8. Metrological bridge: what e_S and e_D measure

8.1. Reconstruction error is not measurement uncertainty

Under VIM terminology, measurement error and measurement uncertainty are distinct concepts. In the present model e_S, e_D, e_R and their statistical analogues R_S, R_D, R_R are first of all reconstruction errors of mathematical targets under a hidden structural alternative. They are not automatically standard uncertainties, instrument variances, or quantum measurement noises.

A physical measurement requires a measurand Q , a measurement model, a unit, a calibration procedure, a reference value, and an uncertainty budget that accounts for all relevant sources in the GUM sense.

8.2. Calibration map

Let a mathematical target s be mapped to a physical quantity by C_S . Define the structural component of physical error by

$$E_{QS}^{\text{str}} = C_S(\hat{s}) - C_S(s_b).$$

For a linear calibration $C_S(s) = a_S s + c_S$,

$$|E_{QS}^{\text{str}}| = |a_S| \cdot |\hat{s} - s_b|.$$

Thus the structural minimax component in physical units scales by $|a_S|$. For nonlinear calibration, transfer of a lower bound requires a verified lower Lipschitz condition $|C_S(s) - C_S(s')| \geq \alpha_S |s - s'|$ over the operating range. Nonlinearity alone does not justify carrying the mathematical bound into physical units.

The total metrological error may contain additional instrument, calibration, and reference components. They cannot be mechanically added to e_S because correlations and cancellations may occur; their treatment belongs to the separate GUM measurement model.

8.3. Special status of $\mathfrak{D}$

The restriction is even stronger for $\mathfrak{D}$. While $\mathfrak{D}$ is merely a protocol coordinate, e_D has the unit of that coordinate and is not an error in a physical dimension of space, time, or any other physical quantity. A physical bridge requires an explicit measurand Q_D and a calibration $C_D: \mathfrak{D} \rightarrow Q_D$ with justified units, traceability, and a reference procedure. Until then, “experimental e_D ” means only reconstruction error of the structural coordinate.

9. Three levels of status

Level	Error object	Information	Status
Abstract PN.2	e_S, e_D, e_R	one estimate without b	proved mathematical theorem
Measurement PN.2	R_S, R_D, R_R, τ_u	pre-unblinding σ -algebra $\mathcal{G}$	proved theorem for a statistical experiment
Physical realization	error/uncertainty of a concrete measurand	real instrument, calibration, units	open operationalization and experiment

This separation prevents status inflation: mathematical closure of PO-6-MATH is not experimental confirmation of PN.2 as a physical law.

10. Relation to quantum uncertainty relations

The Robertson–Schrödinger relation constrains the product of dispersions of quantum observables in a state under operator and domain assumptions. Ozawa-type relations concern measurement noise and disturbance in a quantum measurement process. Theorem 2 concerns a different mathematical task: estimation under two hidden structural alternatives with restricted information.

A shared lower-bound motif does not establish equivalence. Deriving PN.1 from PN.2 would require a separate Hilbert-space representation, self-adjoint operators, domain control, physical calibration, and an experimental protocol. None of these bridges is asserted by the present paper.

11. Status of proof obligation PO-6

Sub-obligation	Result	Status
PO-6.1	full record and accessible σ -algebra $\mathcal{G}$ defined	CLOSED-MATH
PO-6.2	quantitative hiding τ_u formalized	CLOSED-MATH
PO-6.3	class of admissible pre-unblinding estimators defined	CLOSED-MATH
PO-6.4	PN.2-M-S, PN.2-M-R, PN.2-M-K proved	CLOSED-MATH
PO-6.5	type of a valid calibration bridge specified	FORMALIZED
PO-6.6	concrete C_S, C_D , units and references for $R \star R$	OPEN-PHYS/METRO
PO-6.7	independent blinded experiment and estimate of τ_u	OPEN-EXT

Recommended final status

PO-6 = PARTIALLY CLOSED: the mathematical information-and-measurement layer is closed; metrological calibration and a physical experiment remain open. The previously achieved status of PO-11 and PO-12 is unchanged and is not used as evidence of physical realization.

12. Limitations and falsifiable conditions

- If $\Delta_D=0$, the structural factor vanishes.
- If $K(u)=0$, the full-state lower bound vanishes.
- If S does not separate r_L from r_R , the scalar bound may vanish even when $K \neq 0$.
- If $\tau_u=1$, the authorized data perfectly identify the branch and the information lower bound is zero.
- A uniform constant requires verified lower bounds for both $\|K\|$ and the hiding factor $1-\tau_u$.
- None of these mathematical bounds by itself proves a physical ontology of $R \star R$, a relation to $\hbar$, time, gravitation, or cosmology.

13. Conclusion

A rigorous measurement layer has been constructed over the canonical two-point PN.2. The central new element within the project is the replacement of the informal statement “ b is hidden” by an experiment whose accessible information is specified by a σ -algebra and whose branch leakage is quantified by total variation. This yields total-variation-corrected minimax bounds with the factor $(1-\tau_u)^2$ and explains both limiting regimes: the canonical PN.2 under perfect hiding and the disappearance of the information bound under perfect distinguishability.

At the same time, a strict metrological firewall is imposed. PN.2 errors remain reconstruction errors of mathematical targets until physical measurands, calibration maps, units, reference values, and uncertainty budgets are defined. The result therefore closes the mathematical part of PO-6 while deliberately leaving the physical hypotheses of PN.2 unchanged.

Data availability and reproducibility

No empirical data are used. All proofs are analytic and reproducible directly from the definitions given in the text. The existing PO-12 computational certificate concerns separate abstract examples of the canonical theorem package and is not treated here as a physical experiment.

Recommended citation

Kurpishev, I. B. A Measurement Model for the Kurpishev Uncertainty Principle PN.2: Hidden Bracketing Alternatives, Information Distinguishability, and Total-Variation-Corrected Minimax Bounds. Authorial journal manuscript v1.0. Kaliningrad, 2026.

References

- [1] Robertson, H. P. The Uncertainty Principle. *Physical Review*. 1929;34:163-164. doi:10.1103/PhysRev.34.163.
- [2] Schrödinger, E. Zum Heisenbergschen Unschärfepinzip. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*. 1930:296-303.
- [3] Ozawa, M. Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement. *Physical Review A*. 2003;67:042105. doi:10.1103/PhysRevA.67.042105; arXiv:quant-ph/0207121.
- [4] Schafer, R. D. *An Introduction to Nonassociative Algebras*. New York: Academic Press; 1966.
- [5] Baez, J. C. The Octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 2002;39:145-205. doi:10.1090/S0273-0979-01-00934-X; arXiv:math/0105155.
- [6] Le Cam, L. *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*. New York: Springer; 1986. doi:10.1007/978-1-4612-4946-7.
- [7] Tsybakov, A. B. *Introduction to Nonparametric Estimation*. New York: Springer; 2009. doi:10.1007/b13794.
- [8] JCGM 200:2012. *International Vocabulary of Metrology - Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM)*, 3rd ed. doi:10.59161/JCGM200-2012.
- [9] JCGM 100:2008(E). *Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)*. doi:10.59161/JCGM100-2008E.
- [10] JCGM 100:2008/Amd.1:2026. *Evaluation of measurement data - GUM. Amendment 1: Nonlinearity in measurement models*. doi:10.59161/PPDI3267.
- [11] Kurpishev, I. B. Kurpishev Uncertainty Principle PN.2: canonical theorem package v1.0 and authorial journal edition v1.1. Kaliningrad; 2026. Author archive: https://kurpishev.com/tom1/pn2_ru_v1.0.pdf.

Измерительная модель принципа неопределённости Курпишева ПН.2



И. Б. Курпишев

Скрытая скобочная альтернатива,
информационная различимость и TV-
скорректированные минимаксные
границы

Курпишев Иван Борисович

Независимый исследователь, Калининград, Россия

ivan-kurpishev@yandex.ru · <https://kurpishev.com>

Авторская журнальная редакция v1.0 · 22 августа 2026 г.

Аннотация

Построена строгая информационно-измерительная модель для математического принципа неопределённости Курпишева ПН.2, закрывающая математическую часть доказательного обязательства РО-6 и оставляющая физическую операционализацию явно открытой. Для двух допустимых скобочных протоколов b_L и b_R в нормированной неассоциативной алгебре вводится пространство экспериментальной записи, σ -алгебра данных, доступных оценителю до раскрытия истинной ветви, и коэффициент различимости τ_u , определённый как расстояние полной вариации между законами доступных данных. На основе классической двухточечной минимаксной леммы доказываются TV-скорректированные границы для риска восстановления скалярной наблюдаемой S , структурной координаты $\mathfrak{D}$ и полного результата. При совершенной скрытости $\tau_u=0$ новые границы точно редуцируются к детерминированной ПН.2; при полной различимости $\tau_u=1$ информационная нижняя граница корректно вырождается в ноль. Отдельно формализован мост к метрологии: ошибки e_S , e_D и e_R квалифицируются как ошибки восстановления математических объектов, а не как физические неопределённости измерения. Их перевод в измеряемые величины допускается только через заданные калибровочные отображения, единицы, референтные значения и бюджет неопределённости. Тем самым математическая теорема отделяется от будущей физической реализации $R \star R$, от соотношения Робертсона–Шрёдингера и от отношений «шум–возмущение» Одзавы.

Ключевые слова: неассоциативная алгебра; ассоциатор; ПН.2 Курпишева; минимаксный риск; скрытая альтернатива; полная вариация; статистический эксперимент; измерительная модель; метрология

MSC 2020: 62C20; 17A01.

Научная новизна и границы заявления о новизне

Новизна настоящей работы заявляется строго внутри формализованной программы ПН.2 и состоит не в самой двухточечной лемме Ле Кама, не в расстоянии полной вариации и не в терминах метрологии VIM/GUM. Эти элементы классические. Новым элементом авторской конструкции является их типово согласованное включение в ПН.2 как решения математической части РО-6.

- Скрытость скобочного индекса b заменена проверяемым информационным условием: задана σ -алгебра доступных до раскрытия данных и коэффициент различимости τ_u .
- Детерминированные ошибки e_S , e_D , e_R вложены в более общий статистический эксперимент с минимаксными рисками R_S , R_D , R_R .
- Доказаны TV-скорректированные формы ПН.2-M-S и ПН.2-M-R с множителем $(1-\tau_u)^2$, автоматически учитывающим утечку информации о ветви.
- Показано, что исходная детерминированная ПН.2 является предельным случаем совершенной скрытости $\tau_u=0$, а при $\tau_u=1$ информационная граница должна исчезать.

- Введён метрологический firewall: абстрактная ошибка восстановления отделена от физической ошибки и от неопределённости измерения; переход возможен только через калибровку и референтную модель.

Граница приоритета

Работа не заявляет авторский приоритет на классические методы статистической теории решений, полную вариацию или терминологию JCGM. Авторская претензия ограничена конкретной архитектурой ПН.2, постановкой РО-6 и полученной TV-скорректированной формой внутри этой архитектуры.

1. Введение

Канонический теоремный пакет ПН.2 рассматривает две допустимые расстановки скобок в нормированной, вообще говоря, неассоциативной алгебре. Если один и тот же вход $u=(x,y,z)$ допускает два результата r_L и r_R , а единый оценщик не использует истинный скобочный индекс b , то двухточечная геометрия даёт положительную минимаксную ошибку, когда соответствующие цели различимы. Эта конструкция уже является строгой математической теоремой, но сама по себе ещё не является измерительной моделью.

Открытое обязательство РО-6 возникает именно в месте перехода от абстрактного запрета «не использовать b » к эксперименту. Формальное отсутствие метки b недостаточно: данные прибора могут сами раскрывать ветвь. Поэтому требуется определить, какие данные видит оценщик, когда он обязан зафиксировать ответ, насколько доступные распределения различают b_L и b_R и каким образом математические ошибки сопоставляются с метрологическими величинами.

Цель статьи - построить этот мост без повышения физического статуса ПН.2. Основной результат является теоремой статистической теории решений для двухальтернативного эксперимента; физическая реализация $R \star R$, калибровка $\mathfrak{D}$, связь с $\hbar$ и квантовой теорией остаются отдельными проверяемыми гипотезами.

2. Алгебраическое ядро ПН.2

2.1. Две скобочные альтернативы

Пусть $\mathcal{A}$ - нормированное вещественное или комплексное линейное пространство с билинейной операцией $\odot$. Для $u=(x,y,z) \in \Omega \subset \mathcal{A}^3$ определим два допустимых протокола

$$b_L(u)=(x \odot y) \odot z, \quad b_R(u)=x \odot (y \odot z).$$

Соответствующие результаты обозначим $r_L(u)=b_L(u)$, $r_R(u)=b_R(u)$. Ассоциатор равен

$$K(u)=r_L(u)-r_R(u)=(x \odot y) \odot z - x \odot (y \odot z).$$

Пусть $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ - выбранная скалярная наблюдаемая, а $\mathfrak{D}: \{b_L, b_R\} \rightarrow \mathbb{R}$ - структурная координата протокола. Введём разрывы

$$\Delta_S(u)=|S(r_L(u))-S(r_R(u))|, \quad \Delta_D=|\mathfrak{D}(b_L)-\mathfrak{D}(b_R)|,$$

$$\Delta_R(u)=||r_L(u)-r_R(u)||=||K(u)||.$$

Здесь $\mathfrak{D}$ является математической координатой протокола. Её физическая интерпретация не следует из обозначения и требует отдельного выполнения РО-4, РО-6 и РО-8.

2.2. Детерминированная исходная форма

Если оценщик должен выдать одну и ту же пару $(\hat{s}, \hat{d})$, не используя ветвь b , канонический пакет определяет

$$e_S(u; \hat{s})=\max\{|\hat{s}-S(r_L(u))|, |\hat{s}-S(r_R(u))|\},$$

$$e_D(u; \hat{d}) = \max\{|\hat{d} - \mathfrak{D}(b_L)|, |\hat{d} - \mathfrak{D}(b_R)|\}.$$

Для полного результата $\hat{r} \in \mathcal{R}$ аналогично

$$e_R(u; \hat{r}) = \max\{|\hat{r} - r_L(u)|, |\hat{r} - r_R(u)|\}.$$

Двухточечное неравенство даёт $e_S \geq \Delta_S/2$, $e_D \geq \Delta_D/2$ и $e_R \geq \|K\|/2$, откуда следуют исходные произведения с коэффициентом 1/4. Однако это описание эквивалентно эксперименту только тогда, когда до момента фиксации оценки данные не дают оценщику ветвезависимой информации.

3. Информационно-измерительный эксперимент

3.1. Доступная σ -алгебра

Для фиксированного u зададим измеримое пространство полной записи $(\mathcal{Z}, \mathcal{F})$. При ветви $b \in \{L, R\}$ запись Z имеет закон $P_{\{u, b\}}$. Оценщику до раскрытия разрешена только σ -алгебра $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Величина $\mathcal{G}$ является частью протокола и должна быть зарегистрирована до эксперимента.

Разрешено до фиксации оценки	Запрещено до фиксации оценки
вход u и область Ω	истинная метка b
заранее опубликованные $\odot$, S , $\mathfrak{D}$	запечатанный журнал выбора ветви
параметры прибора и калибровки	референтные значения, вычисленные после раскрытия b
разрешённая часть сырой записи Z	post-unblinding обработка, использующая b
независимое случайное зерно алгоритма	адаптация модели после просмотра истинной ветви

Таким образом, « b скрыт» означает не психологическое незнание наблюдателя, а ограничение измеримой информации, на которой разрешено строить оценку.

3.2. Количественная скрытость

Формальное отсутствие метки b не исключает того, что распределения доступной записи различаются. Поэтому определим коэффициент различимости

$$\tau_u := TV(P_{\{u, L\}}|_{\mathcal{G}}, P_{\{u, R\}}|_{\mathcal{G}}) \in [0, 1].$$

Здесь TV - расстояние полной вариации. Удобно также ввести коэффициент скрытости $h_u = 1 - \tau_u$. Тогда $h_u = 1$ соответствует совершенной скрытости, $0 < h_u < 1$ - частичной скрытости, а $h_u = 0$ - полной различимости ветвей по разрешённым данным.

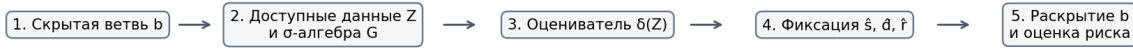
Критическое уточнение РО-6

Не достаточно не сообщать оценщику символ b . Если доступный сигнал Z однозначно кодирует ветвь, то $\tau_u = 1$ и информационная нижняя граница должна быть нулевой. Именно этот случай не различался исходной формулировкой « b скрыт».

3.3. Протокол ослепления и раскрытия

1. До запуска фиксируются Ω , два допустимых протокола, S , $\mathfrak{D}$, канал получения данных, разрешённая σ -алгебра $\mathcal{G}$, алгоритм оценки и критерий риска.
2. Истинная ветвь b задаётся механизмом, недоступным оценщику до стадии раскрытия.
3. Формируется экспериментальная запись Z ; оценщику выдаётся только информация из $\mathcal{G}$.
4. Оценщик вычисляет $\hat{s}$, $\hat{d}$ и/или $\hat{r}$ и криптографически либо процедурно фиксирует результат.
5. После фиксации раскрывается b и вычисляются ветвеспецифические референтные цели.

6. Рассчитываются ошибки/риски и публикуется также оценка различимости τ_u или её статистически контролируемая верхняя граница.



Метки b и post-unblinding данные нельзя использовать до фиксации оценки.

Рис. 1. Протокол измерительной модели ПН.2: оценка фиксируется до раскрытия b.

4. Допустимые оценщики и риски

Допустимым считается заранее зафиксированный $\mathcal{G}$ -измеримый оценщик. Разрешена внешняя рандомизация, если её случайное зерно независимо от b и входит в информационную модель. Запрещены любые операции, использующие раскрытую ветвь до фиксации результата.

$$\hat{s}=\delta_S(Z), \quad \hat{d}=\delta_D(Z), \quad \hat{r}=\delta_R(Z).$$

Определим максимальные по двум ветвям ожидаемые абсолютные/метрические ошибки:

$$R_S(u;\delta_S)=\max_{b\in\{L,R\}} E_{\{u,b\}} |\delta_S(Z)-S(r_b(u))|,$$

$$R_D(u;\delta_D)=\max_{b\in\{L,R\}} E_{\{u,b\}} |\delta_D(Z)-\mathfrak{D}(b)|,$$

$$R_R(u;\delta_R)=\max_{b\in\{L,R\}} E_{\{u,b\}} |\delta_R(Z)-r_b(u)|.$$

При необходимости можно далее брать infimum по классу допустимых оценщиков, получая обычные минимаксные риски. Для доказательства нижних границ это не требуется: оценки ниже верны для каждого допустимого правила отдельно.

5. Двухточечная TV-лемма

Лемма 1 (двухточечная минимаксная граница с полной вариацией). Пусть P_0 и P_1 - два вероятностных закона на одном измеримом пространстве, θ_0 и θ_1 - две точки метрического пространства (Θ,d) , а δ - произвольный измеримый оценщик. Тогда

$$\max\{E_0 d(\delta,\theta_0), E_1 d(\delta,\theta_1)\} \geq \frac{1}{2} d(\theta_0,\theta_1) [1-TV(P_0,P_1)].$$

Доказательство. Возьмём общую доминирующую меру $\mu=P_0+P_1$ и плотности p_0,p_1 . Для каждой реализации z неравенство треугольника даёт $d(\delta(z),\theta_0)+d(\delta(z),\theta_1)\geq d(\theta_0,\theta_1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & E_0 d(\delta,\theta_0)+E_1 d(\delta,\theta_1) \\ & \geq \int \min(p_0,p_1)[d(\delta,\theta_0)+d(\delta,\theta_1)] d\mu \\ & \geq d(\theta_0,\theta_1) \int \min(p_0,p_1)d\mu \\ & = d(\theta_0,\theta_1)[1-TV(P_0,P_1)]. \end{aligned}$$

Максимум двух неотрицательных слагаемых не меньше половины их суммы. Лемма доказана. $\square$

Лемма является классическим двухточечным инструментом статистической теории решений; авторская новизна настоящей статьи не приписывается самой лемме.

6. Измерительная теорема ПН.2

Теорема 2 (TV-скорректированная измерительная ПН.2). Для фиксированного $u \in \Omega$ пусть задан эксперимент раздела 3 и $\tau_u = TV(P_{\{u,L\}}|_{\mathcal{G}}, P_{\{u,R\}}|_{\mathcal{G}})$. Тогда для любой допустимой пары оценщиков δ_S, δ_D

$$R_S(u; \delta_S) \geq \frac{1}{2} \Delta_S(u)(1 - \tau_u),$$

$$R_D(u; \delta_D) \geq \frac{1}{2} \Delta_D(u)(1 - \tau_u),$$

$$R_S(u; \delta_S) R_D(u; \delta_D) \geq \frac{1}{4} (1 - \tau_u)^2 \Delta_S(u) \Delta_D(u). \quad (\text{PN.2-M-S})$$

Для полного результата

$$R_R(u; \delta_R) \geq \frac{1}{2} \|K(u)\| (1 - \tau_u),$$

$$R_R(u; \delta_R) R_D(u; \delta_D) \geq \frac{1}{4} (1 - \tau_u)^2 \|K(u)\| \Delta_D(u). \quad (\text{PN.2-M-R})$$

Доказательство. Применим лемму 1 последовательно к целям $S(r_L), S(r_R)$ в $\mathbb{R}$; к $\mathfrak{D}(b_L), \mathfrak{D}(b_R)$ в $\mathbb{R}$; и к r_L, r_R в метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. В последнем случае расстояние между целями равно $\|r_L - r_R\| = \|K(u)\|$. Перемножение неотрицательных индивидуальных границ даёт две заявленные произведённые оценки. $\square$

6.1. Разделяющая наблюдаемая и равномерная форма

Если S является c -разделяющей на Ω , то $\Delta_S(u) \geq c \|K(u)\|$. Следовательно,

$$R_S R_D \geq (c/4)(1 - \tau_u)^2 \|K(u)\| \Delta_D(u). \quad (\text{PN.2-M-K})$$

Если дополнительно существует $\bar{\tau} < 1$ такое, что $\tau_u \leq \bar{\tau}$ на Ω , и $\|K(u)\| \geq \varepsilon_m(u)$, то

$$R_S R_D \geq (c \varepsilon_m - \Delta_D / 4)(1 - \bar{\tau})^2 m(u). \quad (\text{PN.2-M-U})$$

Равномерная измерительная константа поэтому требует одновременно алгебраической невырожденности и информационной невырожденности. Даже большой ассоциатор не создаёт измерительной нижней границы, если разрешённые данные полностью раскрывают ветвь.

6.2. Детерминированная ПН.2 как частный случай

Если доступная до оценки запись имеет один и тот же закон при b_L и b_R , то $\tau_u = 0$. В частности, если оценка формируется только из u и заранее опубликованной модели, без ветвезависимого сигнала, теорема 2 даёт

$$R_S \geq \Delta_S / 2, \quad R_D \geq \Delta_D / 2, \quad R_R \geq \|K\| / 2,$$

то есть точно воспроизводит коэффициенты канонической детерминированной ПН.2. Если же $\tau_u = 1$, ветви статистически разделимы без ошибки по разрешённым данным, и дополнительная информационная граница становится нулевой. Это не опровержение ПН.2, а правильное описание другой информационной задачи.

7. Иллюстративный канал частичной скрытости

Рассмотрим чисто статистический пример, не претендующий на физическую реализацию $R \star R$. Пусть скрытая ветвь кодируется $b \in \{-1, +1\}$, а оценщик получает бинарный индикатор Z , который равен истинной ветви с вероятностью $1-p$ и инвертирован с вероятностью p , где $0 \leq p \leq 1/2$.

$$P(Z=b|b)=1-p, \quad P(Z=-b|b)=p.$$

Для двух бернуллиевских законов на $\{-1, +1\}$

$$\tau = TV(P_L, P_R) = 1 - 2p, \quad 1 - \tau = 2p.$$

Поэтому измерительная граница принимает вид

$$R_S R_D \geq p^2 \Delta_S \Delta_D,$$

$$R_R R_D \geq p^2 ||K|| \Delta_D.$$

При $p=1/2$ индикатор независим от b , $\tau=0$ и восстанавливается исходный коэффициент $1/4$. При $p=0$ индикатор безошибочно раскрывает ветвь, $\tau=1$ и информационная граница исчезает. Пример показывает, что «степень скрытости» должна быть частью измерительного паспорта, а не неявным словесным предположением.

8. Метрологический мост: что измеряют e_S и e_D

8.1. Ошибка восстановления не равна неопределённости измерения

В терминологии VIM measurement error и measurement uncertainty - различные понятия. В настоящей модели e_S, e_D, e_R и их статистические аналоги R_S, R_D, R_R относятся прежде всего к ошибке восстановления математической цели при скрытой структурной альтернативе. Они не являются автоматически стандартными неопределённостями, дисперсиями прибора или квантовыми шумами.

Для физического измерения необходимо задать measurand Q , модель измерения, единицу, процедуру калибровки, референтное значение и вклад всех релевантных источников неопределённости в смысле GUM.

8.2. Калибровочное отображение

Пусть математическая цель s переводится в физическую величину отображением C_S . Структурную компоненту физической ошибки определим как

$$E_{QS}^{str} = C_S(\hat{s}) - C_S(s_b).$$

Если $C_S(s) = a_S s + c_S$, то точно

$$|E_{QS}^{str}| = |a_S| \cdot |\hat{s} - s_b|.$$

Следовательно, минимаксная структурная компонента в физических единицах масштабируется коэффициентом $|a_S|$. Для нелинейной калибровки перенос нижней границы требует доказанного нижнего условия Липшица $|C_S(s) - C_S(s')| \geq \alpha_S |s - s'|$ на рабочем диапазоне. Сам факт нелинейности не разрешает автоматически переносить математическую границу.

Полная метрологическая ошибка может содержать дополнительные приборные, калибровочные и референтные составляющие. Они не должны механически складываться с e_S : возможны корреляции и компенсации, поэтому их обработка относится к отдельной измерительной модели GUM.

8.3. Особый статус $\mathfrak{D}$

Для $\mathfrak{D}$ ограничение ещё жёстче. Пока $\mathfrak{D}$ является протокольной структурной координатой, e_D имеет единицу этой координаты и не является ошибкой измерения размерности пространства, времени или иной физической величины. Физический мост требует явного measurand Q_D и калибровки $C_D: \mathfrak{D} \rightarrow Q_D$ с обоснованными единицами, прослеживаемостью и референтной процедурой. До этого этапа выражение «экспериментальная ошибка e_D » допустимо только в смысле ошибки восстановления структурного индекса.

9. Сопоставление трёх уровней

Уровень	Объект ошибки	Информация	Статус
Абстрактная ПН.2	e_S, e_D, e_R	одна оценка без b	доказанная математическая теорема

Уровень	Объект ошибки	Информация	Статус
Измерительная ПН.2	R_S, R_D, R_R, τ_u	σ -алгебра $\mathcal{G}$ до unblinding	доказанная теорема статистического эксперимента
Физическая реализация	ошибка/неопределённость конкретного measurand	реальный прибор, калибровка, единицы	открытая операционализация и эксперимент

Такое разделение предотвращает повышение статуса: математическая закрытость PO-6-MATH не является экспериментальным подтверждением ПН.2 как физического закона.

10. Отношение к квантовым соотношениям неопределённости

Соотношение Робертсона–Шрёдингера ограничивает произведение дисперсий двух квантовых наблюдаемых в состоянии при операторных и доменных предпосылках. Отношения Одзавы описывают шум измерения и возмущение в квантовом измерительном процессе. Теорема 2 относится к иной математической задаче: различению двух скрытых структурных альтернатив при ограниченной информации.

Общий мотив нижней границы не устанавливает эквивалентности. Для вывода ПН.1 из ПН.2 потребуются отдельное гильбертово представление, самосопряжённые операторы, контроль доменов, физическая калибровка и экспериментальный протокол. Настоящая статья этих мостов не утверждает.

11. Статус доказательного обязательства PO-6

Подобязательство	Результат	Статус
PO-6.1	задана полная запись и доступная σ -алгебра $\mathcal{G}$	CLOSED-MATH
PO-6.2	формализована количественная скрытость τ_u	CLOSED-MATH
PO-6.3	задан класс допустимых pre-unblinding оценщиков	CLOSED-MATH
PO-6.4	доказаны PN.2-M-S, PN.2-M-R, PN.2-M-K	CLOSED-MATH
PO-6.5	задан тип корректного калибровочного моста	FORMALIZED
PO-6.6	конкретные C_S, C_D , единицы и эталоны для $R \star R$	OPEN-PHYS/METRO
PO-6.7	независимый слепой эксперимент и оценка τ_u	OPEN-EXT

Предлагаемый итоговый статус

PO-6 = PARTIALLY CLOSED: математическая информационно-измерительная часть закрыта; метрологическая калибровка и физический эксперимент остаются открыты. PO-11 и PO-12 при этом сохраняют ранее достигнутый статус и не используются как доказательство физической реализации.

12. Ограничения и фальсифицируемые условия

- Если $\Delta_D=0$, структурная часть границы вырождается.
- Если $K(u)=0$, полносостояний граница по результату вырождается.
- Если S не различает g_L и g_R , скалярная граница может быть нулевой даже при $K \neq 0$.
- Если $\tau_u=1$, доступные данные полностью идентифицируют ветвь и информационная нижняя граница равна нулю.
- Равномерная константа требует доказанных нижних границ одновременно для $\|K\|$ и для скрытости $1-\tau_u$.
- Ни одна из этих математических границ сама по себе не доказывает физическую онтологию $R \cdot R$, связь с $\hbar$, временем, гравитацией или космологией.

13. Заключение

Построена строгая измерительная надстройка над канонической двухточечной ПН.2. Главным новым элементом внутри проекта является замена неформальной фразы «индекс b скрыт» на эксперимент, в котором доступная информация задаётся σ -алгеброй, а степень раскрытия ветви количественно измеряется полной вариацией. Это приводит к TV-скорректированным минимаксным границам с множителем $(1-\tau_u)^2$ и точно объясняет два предельных режима: исходную ПН.2 при совершенной скрытости и исчезновение информационной границы при полной различимости.

Одновременно введён строгий метрологический firewall: ошибки ПН.2 являются ошибками восстановления математических целей до тех пор, пока не определены физические measurands, калибровки, единицы, референтные значения и бюджеты неопределённости. Поэтому результат закрывает математическую часть РО-6, но сознательно не повышает статус физических гипотез ПН.2.

Доступность данных и воспроизводимость

Эмпирические данные в работе не использовались. Все доказательства аналитические и воспроизводятся непосредственно из приведённых определений. Существующий вычислительный сертификат РО-12 относится к отдельным абстрактным примерам канонического пакета и не рассматривается здесь как физический эксперимент.

Рекомендуемое цитирование

Курпишев И. Б. Измерительная модель принципа неопределённости Курпишева ПН.2: скрытая скобочная альтернатива, информационная различимость и TV-скорректированные минимаксные границы. Авторская журнальная редакция v1.0. Калининград, 2026.

Литература

- [1] Robertson H. P. The Uncertainty Principle. Physical Review. 1929;34:163-164. doi:10.1103/PhysRev.34.163.
- [2] Schrödinger E. Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse. 1930:296-303.
- [3] Ozawa M. Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement. Physical Review A. 2003;67:042105. doi:10.1103/PhysRevA.67.042105; arXiv:quant-ph/0207121.
- [4] Schafer R. D. An Introduction to Nonassociative Algebras. New York: Academic Press; 1966.
- [5] Baez J. C. The Octonions. Bulletin of the American Mathematical Society. 2002;39:145-205. doi:10.1090/S0273-0979-01-00934-X; arXiv:math/0105155.
- [6] Le Cam L. Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory. New York: Springer; 1986. doi:10.1007/978-1-4612-4946-7.
- [7] Tsybakov A. B. Introduction to Nonparametric Estimation. New York: Springer; 2009. doi:10.1007/b13794.
- [8] JCGM 200:2012. International Vocabulary of Metrology - Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM), 3rd ed. doi:10.59161/JCGM200-2012.
- [9] JCGM 100:2008(E). Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM). doi:10.59161/JCGM100-2008E.
- [10] JCGM 100:2008/Amd.1:2026. Evaluation of measurement data - GUM. Amendment 1: Nonlinearity in measurement models. doi:10.59161/PPDI3267.
- [11] Курпишев И. Б. Принцип неопределённости Курпишева ПН.2: канонический теоремный пакет v1.0 и журнальная редакция v1.1. Калининград; 2026. Авторский архив: https://kurpishev.com/tom1/pn2_ru_v1.0.pdf.