Авторская математическая статья

Теорема Дезарга-Курпишева

о двух кониках, центровой оси и гармонической точке

доказательство по принципам KLT-RBD

Иван Борисович Курпишев

Ivan Borisovich Kurpishev

Independent Researcher, Kaliningrad

me@kurpishev.ru

Калининград, 2026

Аннотация

В статье формулируется и доказывается строгая версия авторской теоремы Дезарга-Курпишева. Рассматриваются две невырожденные центральные коники в проективной плоскости с выделенной несобственной прямой. Их центры определяются не метрически, а проективно: как полюса несобственной прямой относительно соответствующих коник. Линия, соединяющая эти центры, рассматривается как центровая ось. При наличии дезарговой конфигурации, индуцированной образующими двух проективных конусов и визирной связью, эта центровая ось совпадает с осью Дезарга. Если пересечение этой оси с несобственной прямой является гармонически сопряжённой точкой к визирной точке относительно двух исходящих направлений, то оно единственно и задаёт гармоническую точку Дезарга-Курпишева.

Доказательство построено по принципам KLT: геометрическая конфигурация реперизуется как структура $\mathrm{Rep} = (R, I, U; \mathscr{D})$, где R есть фактическая конфигурация коник, центров, направлений и оси; I есть идея центрового гармонического замыкания; U есть универсум допустимых проективных положений; $\mathscr{D}$ есть достаточное основание, состоящее из полярности коники, аксиом проективной плоскости, теоремы Дезарга и гармонического крест-соотношения. В этой форме теорема задаёт строгий мост между классической проективной геометрией и авторской KLT-логикой реперного доказательства.

Ключевые слова: теорема Дезарга; Курпишев; коника; проективный конус; полярность; центр коники; несобственная прямая; гармоническая четвёрка; крест-соотношение; Reper; KLT; RBD; λ-истинность.

Содержание

1. Введение

Классическая теорема Дезарга связывает перспективность двух треугольников с коллинеарностью трёх точек пересечения соответствующих сторон. В таком виде она является фундаментальным инцидентностным законом проективной геометрии: перспектива из точки порождает ось, а ось перспективности, в обратном направлении, восстанавливает точку перспективы.

Теорема Дезарга-Курпишева использует этот классический принцип в расширенном геометрическом контексте. Вместо двух треугольников в центре внимания находятся две центральные коники, понимаемые как сечения двух проективных конусов. Каждая коника имеет центр, но этот центр определяется строго проективно: как полюс выделенной несобственной прямой относительно данной коники. Поэтому линия центров двух коник не является метрической вспомогательной линией. Она становится проективно определённой осью, которая может быть сопоставлена с осью Дезарга.

Главный смысл теоремы состоит в следующей цепочке:

$$\begin{aligned} \text{две коники} &\longrightarrow \text{два полярных центра} \\ &\longrightarrow \text{центровая ось} \\ &\longrightarrow \text{несобственная точка} \\ &\longrightarrow \text{гармоническое замыкание.} \end{aligned}$$

В KLT-прочтении эта цепочка является не только геометрической, но и доказательной. Факт конфигурации, идея гармонического центра, универсум допустимых положений и достаточное основание должны быть согласованы в одном Reper. Поэтому доказательство ниже строится в двух слоях: сначала даётся классическая проективная часть, затем фиксируется KLT-протокол согласования.

2. Проективная среда

Всюду далее $\mathbb{K}$ обозначает поле характеристики, отличной от 2. Основной наглядный случай - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, однако доказательство использует только проективные свойства и не зависит от евклидовой метрики.

Пусть

$$\Pi = \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$$

- проективная плоскость, а

$$p \subset \Pi$$

- выделенная прямая. В аффинной интерпретации она играет роль несобственной прямой. Аффинная часть плоскости задаётся как

$$\Pi_{\text{aff}} = \Pi \setminus p.$$

Точки прямой p интерпретируются как направления. Именно на этой прямой будет построена гармоническая четвёрка

$$(A, C; B, D).$$

Определение 2.1 (Несобственная прямая). Выделенная прямая $p \subset \Pi$ называется несобственной прямой конфигурации, если она служит общим горизонтом для центрового определения коник и для построения гармонической точки D.

Определение 2.2 (Центральная коника относительно p). Невырожденная коника $\Phi \subset \Pi$ называется центральной относительно p, если прямая p не является касательной к Φ и полюс прямой p относительно Φ определён как конечная точка аффинной части Π_{aff}.

3. Полярность коники и центр

Невырожденная коника Φ в проективной плоскости задаёт полярность:

$$\mathrm{Pol}_\Phi : \{\text{точки}\} \longleftrightarrow \{\text{прямые}\}.$$

Точке сопоставляется её поляра, а прямой - её полюс. Этот аппарат позволяет определить центр коники без обращения к расстояниям, углам и метрике.

Определение 3.1 (Центр коники). Пусть $\Phi \subset \Pi$ - невырожденная коника, а $p \subset \Pi$ - выделенная несобственная прямая. Центром коники Φ относительно p называется точка

$$O_\Phi := \mathrm{Pole}_\Phi(p).$$

Для двух коник Φ_1 и Φ_2 будем писать

$$O = \mathrm{Pole}_{\Phi_1}(p), \qquad O' = \mathrm{Pole}_{\Phi_2}(p).$$

Если $O \neq O'$, то эти две точки задают единственную прямую:

$$\ell = OO'.$$

Эта прямая называется центровой осью двух коник.

Определение 3.2 (Центровая ось). Пусть Φ_1, Φ_2 - две центральные коники относительно p, а O, O' - их полярные центры. Если $O \neq O'$, то прямая

$$\ell_{OO'} := OO'$$

называется центровой осью пары (Φ_1, Φ_2).

4. Гармоническая точка на несобственной прямой

Пусть A, B, C - три различные точки на прямой p. В проективной геометрии четвёрка точек $(A, C; B, D)$ называется гармонической, если её крест-соотношение равно -1:

$$\mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1.$$

Определение 4.1 (Гармонически сопряжённая точка)**.** Для трёх различных точек $A, B, C \in p$ точка $D \in p$ называется гармонически сопряжённой к B относительно пары A, C, если

$$\mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1.$$

Она обозначается

$$D = H_{A,C}(B).$$

Лемма 4.2 (Единственность гармонической точки)**.** *Пусть* $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$*. Для любых трёх различных точек* $A, B, C \in p$ *существует единственная точка* $D \in p$*, такая что*

$$\mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1.$$

Доказательство. Выберем на прямой p проективную координату. Проективным преобразованием прямой можно перевести две точки A и C в удобные координатные положения. Крест-соотношение инвариантно относительно проективных преобразований, поэтому уравнение

$$\mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1$$

становится линейно-дробным уравнением относительно координаты точки D. Так как A, B, C различны и характеристика поля не равна 2, это уравнение имеет ровно одно решение. Инвариантность крест-соотношения возвращает существование и единственность точки D в исходной прямой p. □

5. Дезаргова конфигурация, извлечённая из двух конусов

Пусть две коники Φ_1 и Φ_2 рассматриваются как плоские сечения двух проективных конусов. Для строгого доказательства существенна не метрическая форма этих конусов, а проективная схема соответствия их образующих.

Обозначим две тройки точек, полученные из соответствующих образующих и визирной связи, через

$$T_1 = (P_1, P_2, P_3), \qquad T_2 = (Q_1, Q_2, Q_3).$$

Эти тройки понимаются как два треугольника, вложенные в плоскость сечения Π или полученные в Π проективным следом пространственной конфигурации.

Определение 5.1 (Дезаргова конфигурация)**.** Две тройки точек $T_1 = (P_1, P_2, P_3)$ и $T_2 = (Q_1, Q_2, Q_3)$ образуют дезаргову конфигурацию, если прямые

$$P_1Q_1, \qquad P_2Q_2, \qquad P_3Q_3$$

пересекаются в одной точке перспективности или задают допустимую проективную перспективность. Тогда точки

$$X_{12} = P_1P_2 \cap Q_1Q_2,$$

$$X_{13} = P_1P_3 \cap Q_1Q_3,$$

$$X_{23} = P_2P_3 \cap Q_2Q_3$$

лежат на одной прямой. Эта прямая называется осью Дезарга и обозначается

$$d_{\mathrm{Des}}.$$

В теореме Дезарга-Курпишева дезаргова ось не вводится как внешняя линия. Она отождествляется с центровой осью двух коник:

$$d_{\mathrm{Des}} = OO'.$$

Именно это отождествление связывает классическую дезаргову геометрию с полярной геометрией двух коник.

6. Конфигурация Дезарга-Курпишева

Определение 6.1 (Конфигурация Дезарга-Курпишева)**.** Конфигурацией Дезарга-Курпишева называется набор

$$\mathscr{C}_{\mathrm{DK}} = (\Pi, p; A, B, C; \Phi_1, \Phi_2; O, O'; d_{\mathrm{Des}})$$

со следующими свойствами:

1) $\Pi = \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ - проективная плоскость над полем $\mathbb{K}$, где $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$;

2) $p \subset \Pi$ - выделенная несобственная прямая;

3) $A, B, C \in p$ - три различные точки;

4) $\Phi_1, \Phi_2 \subset \Pi$ - две невырожденные центральные коники относительно p;

5) центры коник определены полярно:

$$O = \mathrm{Pole}_{\Phi_1}(p), \qquad O' = \mathrm{Pole}_{\Phi_2}(p);$$

6) $O \neq O'$, поэтому линия OO' определена;

7) образующие двух проективных конусов и визирная связь задают дезаргову конфигурацию;

8) ось Дезарга совпадает с центровой осью:

$$d_{\mathrm{Des}} = OO';$$

9) пересечение этой оси с несобственной прямой является гармонически сопряжённой точкой:

$$OO' \cap p = H_{A,C}(B).$$

Последнее условие можно записать в эквивалентной форме:

$$\mathrm{cr}(A, C; B, OO' \cap p) = -1.$$

7. Теорема Дезарга-Курпишева

Теорема 7.1 (Теорема Дезарга-Курпишева)**.** *Пусть дана конфигурация Дезарга-Курпишева*

$$\mathscr{C}_{\mathrm{DK}} = (\Pi, p; A, B, C; \Phi_1, \Phi_2; O, O'; d_{\mathrm{Des}}).$$

Тогда линия центров двух коник

$$OO'$$

пересекает несобственную прямую p в единственной точке

$$D = OO' \cap p,$$

и эта точка является гармонически построенной точкой Дезарга-Курпишева:

$$\mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1.$$

Иначе говоря,

$$D = H_{A,C}(B).$$

Доказательство. По определению конфигурации центры двух коник различны:

$$O \neq O'.$$

Следовательно, в проективной плоскости Π существует единственная прямая, проходящая через O и O'. Обозначим её

$$\ell = OO'.$$

Поскольку ℓ и p являются прямыми одной и той же проективной плоскости, они пересекаются в единственной точке. Обозначим эту точку

$$D = \ell \cap p = OO' \cap p.$$

По условию дезарговой совместимости ось Дезарга, построенная из соответствующих образующих двух конусов и визирной связи, совпадает с центровой осью:

$$d_{\mathrm{Des}} = OO'.$$

Поэтому найденная точка D является не произвольной несобственной точкой, а несобственным следом дезарговой оси:

$$D = d_{\mathrm{Des}} \cap p.$$

По условию гармонической совместимости конфигурации эта точка совпадает с гармонически сопряжённой точкой к B относительно пары A, C:

$$D = H_{A,C}(B).$$

Следовательно, по определению гармонически сопряжённой точки выполняется

$$\mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1.$$

Единственность D следует из единственности пересечения двух прямых в проективной плоскости и из единственности гармонически сопряжённой точки на прямой p. Теорема доказана. □

8. Конструктивная форма теоремы

Для публикационного и прикладного использования удобно записать не только теорему, но и процедуру построения.

Построение 8.1 (Построение точки Дезарга-Курпишева)**.** Пусть заданы p, три различные точки $A, B, C \in p$, две центральные коники Φ_1, Φ_2 и их полярные центры O, O'. Точка Дезарга-Курпишева строится следующим образом:

1) определить центры коник:

$$O = \mathrm{Pole}_{\Phi_1}(p), \qquad O' = \mathrm{Pole}_{\Phi_2}(p);$$

2) провести центровую ось:

$$\ell = OO';$$

3) найти несобственную точку этой оси:

$$D = \ell \cap p;$$

4) проверить гармоническую нормировку:

$$\mathrm{cr}(A,C;B,D) = -1;$$

5) при наличии дезарговой конфигурации отождествить

$$\ell = d_{\mathrm{Des}}.$$

Если пункты 4 и 5 выполнены, точка D является гармонической точкой Дезарга-Курпишева.

Эта форма важна для сайта и для дальнейших вычислительных приложений KLT-RBD: она даёт не только утверждение, но и проверяемый чек-лист построения.

9. KLT-доказательство

В KLT доказательство рассматривается как закрытие Reper-структуры. Для настоящей теоремы Reper имеет вид

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{DK}} = (R, I, U; \mathscr{D}).$$

9.1. Фактический слой R

Фактический слой содержит все данные конфигурации:

$$R = \{\Pi, p, A, B, C, \Phi_1, \Phi_2, O, O', d_{\mathrm{Des}}\}.$$

Сюда входят не только коники и центры, но также выделенная несобственная прямая, три точки на ней и дезаргова ось.

9.2. Идейный слой I

Идея теоремы состоит в том, что линия центров двух коник не является произвольной соединительной прямой. При правильной дезарговой сборке она становится осью согласования двух проективных сечений:

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \text{центровая ось является осью Дезарга} \\ \text{и указывает гармоническую точку} \end{array} \right\}.$$

9.3. Универсум U

Универсум содержит допустимые проективные положения:

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \text{пары центральных коник, полярные центры,} \\ \text{визирные связи, дезарговы оси} \end{array} \right\}.$$

KLT-смысл универсума состоит в том, что теорема не зависит от евклидовой формы коник. Она зависит от проективных отношений: полярности, инцидентности, дезарговой оси и крест-соотношения.

9.4. Достаточное основание $\mathscr{D}$

Достаточное основание состоит из четырёх блоков:

$$\mathscr{D} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{полярность коники,} & \text{аксиома пересечения прямых,} \\ \text{Дезарг,} & \text{гармоническое крест-соотношение} \end{array} \right\}.$$

Именно этот набор закрывает доказательство. Полярность даёт центры, аксиомы проективной плоскости дают единственную центровую ось и её единственное пересечение с p, теорема Дезарга даёт ось перспективности, а гармоническое крест-соотношение даёт λ-замыкание.

10. Lambda-истинность конфигурации

Для точки

$$D = OO' \cap p$$

зададим KLT-индикатор

$$\lambda_{\mathrm{DK}} := \mathrm{cr}(A, C; B, D).$$

Тогда гармоническая истинность конфигурации выражается условием

$$\lambda_{\mathrm{DK}} = -1.$$

Дефект гармонической истинности можно записать как

$$\delta_{\mathrm{DK}} = |\lambda_{\mathrm{DK}} + 1|.$$

Следовательно,

$$\delta_{\mathrm{DK}} = 0$$

тогда и только тогда, когда точка D является гармонически сопряжённой к B относительно A, C.

В терминах статьи это означает:

$$\text{доказанная конфигурация} \iff \begin{cases} D = OO' \cap p, \\ D = d_{\mathrm{Des}} \cap p, \\ \mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1. \end{cases}$$

Таким образом, λ-истинность здесь не заменяет классическое доказательство. Она фиксирует, что все компоненты доказательства согласованы: факт, идея, универсум и достаточное основание собраны в одном репере.

11. Геометрический смысл

Обычная линия через два центра может быть понята как простая соединительная линия. В теореме Дезарга-Курпишева она получает более глубокую роль. Она связывает три слоя:

1) полярный слой: центры O и O' заданы как полюса одной и той же несобственной прямой относительно двух коник;
2) дезаргов слой: та же линия является осью перспективности, возникающей из соответствующих образующих двух конусов;
3) гармонический слой: её несобственная точка D образует гармоническую четвёрку с A, B, C на прямой p.

Тем самым получается новая интерпретация дезарговой оси:

$$\text{ось Дезарга} = \text{центровая ось} = \text{реперная ось гармонического замыкания}.$$

В этом и состоит авторский вклад формулировки: классическая перспектива Дезарга соединяется с полярной геометрией коник и с KLT-критерием гармонической истинности.

12. Следствия

Следствие 12.1 (Единственная несобственная точка центровой оси)**.** *В конфигурации Дезарга-Курпишева центровая ось OO' имеет единственную несобственную точку D, и эта точка совпадает с гармонической точкой $H_{A,C}(B)$.*

Доказательство. Единственность пересечения $OO' \cap p$ следует из проективной плоскости. Совпадение с $H_{A,C}(B)$ следует из гармонической нормировки конфигурации. □

Следствие 12.2 (Реперная интерпретация оси)**.** *Ось OO' является Reper-осью пары коник: она удерживает факт двух сечений, идею центровой связи, универсум проективных направлений и достаточное основание гармонического доказательства.*

Доказательство. Фактические данные задают две коники и два центра. Идейный слой отождествляет линию центров с осью согласования. Универсум задаётся прямой p и допустимыми проективными положениями. Достаточное основание закрывается равенством $d_{\mathrm{Des}} = OO'$ и условием $\mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1$. Значит, ось OO' выполняет функцию Reper-оси. □

13. Итоговая формула статьи

В краткой форме теорема записывается так:

$$O = \mathrm{Pole}_{\Phi_1}(p), \qquad O' = \mathrm{Pole}_{\Phi_2}(p), \qquad O \neq O',$$

$$d_{\mathrm{Des}} = OO',$$

$$D = OO' \cap p,$$

$$\mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1.$$

Или как KLT-замыкание:

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{DK}} = (R, I, U; \mathscr{D}), \qquad \lambda_{\mathrm{DK}} = \mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1.$$

14. Заключение

Теорема Дезарга-Курпишева фиксирует строгий проективно-гармонический узел: две центральные коники задают два полярных центра; эти центры задают единственную центровую ось; при дезарговой совместимости эта ось является осью перспективности; её пересечение с несобственной прямой даёт единственную точку D; при гармонической нормировке эта точка удовлетворяет условию

$$\mathrm{cr}(A, C; B, D) = -1.$$

В результате возникает доказуемая математическая структура, в которой классическая теорема Дезарга, полярность коники и KLT-принцип λ-истинности соединяются в одном Reper. Статья может быть использована как отдельный материал геометрической ветки проекта KLT-RBD и как публикационная страница сайта, посвящённая авторской теореме Дезарга-Курпишева.

Проектные источники и библиографическая ориентация

1. Курпишев И.Б. Материалы проекта KLT-RBD: Reper, λ-истинность, проектная логика, пакетная геометрия, реперные базы данных. Внутренний корпус проекта.

2. Курпишев И.Б. Монография KLT 5.1: логика, стратифицированное время, пакетная геометрия, λ-истинность и KLT. Проектная редакция.

3. Классическая проективная геометрия: теорема Дезарга, полярность коники, гармоническое крест-соотношение, проективные преобразования прямой и плоскости.

4. KLT-RBD-протокол доказательства: реперизация $\mathrm{Rep} = (R, I, U; \mathscr{D})$, проверка достаточного основания, λ-замыкание и дефект гармонической истинности $\delta = |\lambda + 1|$.