

KASVD 谱几何与七维反交换代数

KLT-RBD Reper Artifact 的矩阵桥梁

伊万·鲍里索维奇·库尔皮舍夫 (Ivan B. Kurpishev)

加里宁格勒, 2026

摘要

本文构造一个严格的数学层, 将有限类型化 Reper Artifact 图与矩阵 $M \in M_3(\mathbb{R})$ 、其奇异值谱以及分层的 KASVD 状态空间联系起来。与此同时, 研究七维反交换代数

$$A_M = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}h,$$

其中同一矩阵 M 决定一个混合的中心双线性块。本文证明归一化 SVD 护照的不变性、rank-gap 命题、rank-one 更新下的秩生成判据、精确的 rank-one 编辑距离、导子代数维数公式, 以及关于 Binary-Lie、Malcev 与 Sagle 类的刚性:

$$A_M \in \text{BinaryLie} \iff A_M \in \text{Malcev} \iff A_M \in \text{Sagle} \iff M = 0.$$

此外, 本文在谱安全区域上引入库尔皮舍夫的作者性变分泛函。严格区分已经证明的谱-代数数学层与 KLT-RBD 的 prospective/blind 工程基础设施。本文不宣称已经完成经验性预测验证。

关键词: KASVD; KLT-RBD; Reper; 奇异值分解; 反交换代数; Binary-Lie; Malcev; Sagle; rank-one 扰动; 变分原理。

MSC 2020: 17A30, 15A18, 15A60, 65F35.

1. 引言

在“库尔皮舍夫逻辑 2” (LOGIC OF KURPISHEV 2) 项目中, Reper 对象写作 $\text{Rep} = (R, I, U; D)$, 而 KLT-RBD 被用作来源、充分根据、转移、阻断项和状态的可机器审计记忆。本文从该更大体系中抽取一个独立的数学问题: 构造一个小型矩阵载体, 使秩、谱对称性、扰动稳定性以及基本结构转移都可以严格处理。

本文的中心对象是矩阵 $M \in M_3(\mathbb{R})$ 。它以两种彼此独立的方式出现。第一, 它是由有限 Artifact 图中的类型化边组装而成的算子。第二, 它是七维反交换代数 A_M 的混合双线性块。这两个层面在语义上并不被视为同一对象; 它们的数学联系是共同的 SVD 不变量。

本文使用的经典背景包括奇异值分解、Eckart-Young-Mirsky 定理、标准奇异值扰动估计, 以及 Binary-Lie、Malcev 与 Sagle 代数的既有定义 [1-6]。作者性部分包括 Artifact-to-KASVD 构

造、KASVD 状态分层与转移解释、以同一矩阵 M 作为 Artifact 算子与 A_M 的共同模块，以及变分泛函 $\mathcal{J}_K$ 。

2. Artifact 算子与 KASVD

定义 2.1. Artifact 矩阵

设 $G_A = (V_A, E_A, \tau, w)$ 为有限类型化加权图。固定两个正交归一的三维通道空间

$$X = \text{span}\{R, I, U\}, \quad Y = \text{span}\{D, P, G\}.$$

其中 P 与 G 分别表示 proof/evidence 和 gap/blocker 的分析通道；它们不被宣布为 Reper 的新增分量。对每条边 e 指定 $x_e \in X$ 、 $y_e \in Y$ 与权重 $w(e)$ 。定义

$$T_A = \sum_{e \in E_A} w(e) x_e \otimes y_e, \quad M_A = [T_A] = \sum_{e \in E_A} w(e) x_e y_e^T.$$

定义 2.2. KASVD 护照

设 $M \neq 0$ ，其奇异值满足

$$\sigma_1(M) \geq \sigma_2(M) \geq \sigma_3(M) \geq 0.$$

令

$$\rho(M) = \|M\|_F, \quad s_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad s_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}.$$

称

$$\text{SpecRep}(M) = (\rho; s_2, s_3)$$

为谱护照，称 (s_2, s_3) 为 KASVD 点。该点位于闭三角形

$$0 \leq s_3 \leq s_2 \leq 1.$$

命题 2.3. 形状不变性

在变换

$$M \mapsto cAMB^T, \quad A, B \in O(3), \quad c \neq 0$$

下，KASVD 点 (s_2, s_3) 保持不变，而 ρ 乘以 $|c|$ 。

证明。 正交因子不改变奇异值，而乘以 c 会把全部奇异值乘以 $|c|$ ，因此相对于 σ_1 的比值不变。□

定理 2.4. Rank-gap 定理

若 Artifact 图的活动边最多使用 X 中两个线性独立的输入方向, 或者最多使用 Y 中两个线性独立的输出方向, 则

$$\text{rank } M_A \leq 2, \quad \sigma_3(M_A) = 0.$$

证明。第一种情况下, T_A 的有效定义域维数至多为二; 第二种情况下, T_A 的像包含在维数至多为二的子空间中。因此秩至多为二。□

逆命题并不成立: $\sigma_3 = 0$ 也可能由线性依赖或权重抵消产生。因此 semantic gap、structural gap 与 spectral gap 必须分开保存。

3. Rank-one 动力学

设

$$M' = M + E, \quad E = \alpha xy^T,$$

于是 $\text{rank } E \leq 1$ 。

定理 3.1. 秩生成判据

设 $\text{rank } M = 2$, 单位向量 ℓ 与 r 分别张成 $\ker M^T$ 与 $\ker M$ 。则

$$\text{rank}(M + \alpha xy^T) = 3$$

当且仅当

$$\alpha \neq 0, \quad \ell^T x \neq 0, \quad y^T r \neq 0.$$

证明。rank-one 更新使 rank-two 矩阵的秩增加, 当且仅当新的左方向不属于 $\text{Col } M$, 新的右方向不属于 $\text{Row } M$ 。在余维为一时, 这等价于上述两个非零标量积条件。□

定理 3.2. 秩变化界

对于 rank-one 更新,

$$|\text{rank}(M + E) - \text{rank } M| \leq 1.$$

因此, 一次基本边更新不可能把 rank-one 状态直接变为 rank-three 状态。

定理 3.3. 精确 rank-one 编辑距离

从固定矩阵 M 转换到固定矩阵 N 所需的最少 rank-one 加项数为

$$d_1(M, N) = \text{rank}(N - M).$$

证明。 k 个 rank-one 矩阵之和的秩不超过 k , 给出下界。反之, $N - M$ 的 SVD 将其分解成恰好 $r = \text{rank}(N - M)$ 个 rank-one 项。□

4. KASVD 分层与邻接

对非零 3×3 矩阵考虑七个层:

$$S_1, S_{2g}, S_{2e}, S_{3g}, S_{3,12}, S_{3,23}, S_{3i}.$$

下标给出秩; g 表示正奇异值两两不同; e 表示 rank two 时两个正奇异值相等; 12、23 与 i 表示 rank three 中相应的重数模式。

定理 4.1. 存在性 rank-one 邻接

对于两个 KASVD 层, 存在至少一对代表 $M \in S_\alpha$ 、 $N \in S_\beta$ 满足

$$\text{rank}(N - M) \leq 1$$

当且仅当

$$|\text{rank } S_\alpha - \text{rank } S_\beta| \leq 1.$$

证明。 必要性来自标准秩不等式。对于 rank one 与 rank two, 可以采用对角代表 $\text{diag}(a, 0, 0)$ 和 $\text{diag}(a, b, 0)$, 包括需要时的 $a = b$ 。rank two 到 rank three 的 generic 与 double 层可由对角代表实现。 $S_{2g} \rightarrow S_{3i}$ 例如由 $I - uv^T \rightarrow I$ 实现, 其中 $u = e_1$ 、 $v = e_1 + e_2$, 源矩阵的奇异值为 $(\sqrt{2}, 1, 0)$ 。在 rank-three 块内部, 多数情形通过改变一个对角坐标得到; $S_{3i} \rightarrow S_{3g}$ 可由 $I + e_1(e_1 + e_2)^T$ 实现, 该矩阵具有三个不同的奇异值。把 E 替换为 $-E$ 得到反向箭头。□

该定理是存在性陈述。对于具体的 M, N , 精确判据仍是 $d_1(M, N) = \text{rank}(N - M)$ 。

5. 谱稳定性

对于 $M' = M + E$, 标准奇异值扰动估计给出 [3,4]

$$|\sigma_k(M') - \sigma_k(M)| \leq \|E\|_2.$$

在 generic full-rank 层中定义

$$m_R = \sigma_3, \quad m_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad m_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},$$

以及

$$r_{\text{safe}}(M) = \min\{m_R, m_{12}, m_{23}\}.$$

推论 5.1. 安全半径保证

若

$$\|E\|_2 < r_{\text{safe}}(M),$$

则 $M + E$ 保持满秩, 并且不会穿过 $\sigma_1 = \sigma_2$ 或 $\sigma_2 = \sigma_3$ 两个曲面。

对更新序列 $E_1, \dots, E_n$, 例如更强的条件

$$\sum_{j=1}^n \|E_j\|_2 < r_{\text{safe}}(M_0)$$

保证没有中间 crossing, 因为它控制每一个前缀和。

6. 七维反交换代数

令

$$A_M = V \oplus W \oplus L, \quad V \cong W \cong \mathbb{R}^3, \quad L = \mathbb{R}h,$$

并定义反交换乘法

$$[(v, w, t), (v', w', t')] = (v \times v', w \times w', v^T M w' - v'^T M w).$$

向量 h 张成中心零化子。若 $M = 0$, 则得到 Lie 代数

$$A_0 \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}h.$$

当 $M \neq 0$ 时, 混合块通常破坏 Jacobi 恒等式。

命题 6.1. 保持定向的 SVD 等价

若 $A, B \in SO(3)$, 并对中心坐标作非零缩放, 则混合块变换为

$$M \mapsto cAMB^T, \quad c \neq 0.$$

因此 (s_2, s_3) 是该等价关系的不变量。

Artifact 算子允许更大的 $O(3) \times O(3)$ 作用, 而又积天然对 $SO(3)$ 等变。因此两个层次真正共同的是 SVD 不变量, 而不是完整变换群的一同性。

7. 导子

定理 7.1. 混合块稳定子

设 $M \neq 0$ 。 A_M 的任意导子在 $V \oplus W$ 上诱导块 $P \oplus Q$, 其中

$$P, Q \in \mathfrak{so}(3),$$

并满足

$$PM = MQ.$$

若 M 的正奇异值重数为 m_α , 并令

$$k = \dim \ker M,$$

则

$$\dim \text{Der}(A_M) = \sum_{\alpha} \binom{m_{\alpha}}{2} + k(k-1).$$

证明。 零化子 L 是特征子空间。在商代数 $A_M/L \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ 上, 诱导导子为内导子, 因此由 $P, Q \in \mathfrak{so}(3)$ 表示。与中心双线性形式的相容条件为 $cM = -PM + MQ$ 。与 M 作 Frobenius 内积, 由于 P, Q 反对称, $\text{tr}(M^T PM)$ 与 $\text{tr}(M^T MQ)$ 都为零, 于是 $c\|M\|_F^2 = 0$, 故 $c = 0$ 。进行 SVD 后, 方程 $PM = MQ$ 按相等的正奇异值块和核分解。重数为 m_α 的正奇异值块贡献 $\binom{m_\alpha}{2}$ 个参数, 而 k 维核上的两个独立反对称块贡献 $2\binom{k}{2} = k(k-1)$ 。□

8. Binary-Lie、Malcev 与 Sagle 刚性

令

$$J(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$$

为 Jacobiator。

定理 8.1. Binary-Lie 刚性

对于族 A_M ,

$$A_M \in \text{BinaryLie} \iff M = 0.$$

证明。在反交换记号中, Binary-Lie 恒等式等价于 [1,2]

$$J(x, y, [x, y]) = 0.$$

对每个 $i, j \in \{1, 2, 3\}$, 任选 $k \neq j$ 并令

$$x = f_k, \quad y = e_i - f_j.$$

直接计算得到

$$J(x, y, [x, y]) = M_{ij}h.$$

于是九个 M_{ij} 全部为零。反过来, $M = 0$ 给出 Lie 代数 A_0 , 任何 Lie 代数都是 Binary-Lie。□

推论 8.2. Malcev 刚性

$$A_M \in \text{Malcev} \iff M = 0.$$

证明。每个 Malcev 代数都是 Binary-Lie [1,2]。应用定理 8.1; 逆向由 $M = 0$ 的 Lie 情形得到。□

定理 8.3. Sagle 刚性

采用文献 [1] 中的 Sagle 恒等式

$$[J(x, y, z), w] = J(w, z, [x, y]) + J(w, y, [z, x]) + J(w, x, [y, z]).$$

则

$$A_M \in \text{Sagle} \iff M = 0.$$

证明。定义 Sagle 缺陷

$$\mathcal{S}(x, y, z, w) = [J(x, y, z), w] - J(w, z, [x, y]) - J(w, y, [z, x]) - J(w, x, [y, z]).$$

对 V 的标准基 e_1, e_2, e_3 与 W 的标准基 f_1, f_2, f_3 , 直接代入得到:

系数	(x, y, z, w)	$\mathcal{S}(x, y, z, w)$
M_{11}	(e_1, e_2, f_1, e_2)	$M_{11}h$
M_{12}	(e_1, e_2, f_2, e_2)	$M_{12}h$
M_{13}	(e_1, e_2, f_3, e_2)	$M_{13}h$
M_{21}	(e_1, e_2, f_1, e_1)	$-M_{21}h$
M_{22}	(e_1, e_2, f_2, e_1)	$-M_{22}h$
M_{23}	(e_1, e_2, f_3, e_1)	$-M_{23}h$
M_{31}	(e_1, e_2, f_2, f_3)	$-M_{31}h$
M_{32}	(e_1, e_2, f_1, f_3)	$M_{32}h$
M_{33}	(e_1, e_2, f_1, f_2)	$-M_{33}h$

若 A_M 是 Sagle 代数, 则每个缺陷都为零, 因此所有 $M_{ij} = 0$ 。反之, $M = 0$ 给出 Lie 代数, 而 Lie 代数满足 Sagle 恒等式。□

因此, 在族 A_M 内, 三个更广的非结合类别同时收缩到唯一的 Lie 层:

$$A_M \in \text{BinaryLie} \iff A_M \in \text{Malcev} \iff A_M \in \text{Sagle} \iff M = 0.$$

9. 共同的 SVD 模空间桥梁

定理 9.1. Artifact/KASVD - A_M 桥梁

设同一非零矩阵 M 同时被用作

1. Artifact 算子 $T_A : X \rightarrow Y$ 的矩阵;
2. 反交换代数 A_M 的混合中心块。

则归一化谱

$$(s_2, s_3) = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right)$$

是 Artifact 算子的正交-尺度几何与代数混合块的保持定向正交-尺度等价共同不变量。

证明。在 Artifact 层面, 奇异值比在 $O(3) \times O(3)$ 与公共非零尺度下不变。在代数层面, 连续基变换包含 $SO(3) \times SO(3)$, 同时允许中心坐标的同一非零缩放。在两种情形中, 全部奇异值只受到公共比例因子的影响, 因此其比值一致。□

该定理不声称语义 Artifact 本身就是一个代数; 它只声明两个构造具有严格的共同矩阵不变量。

10. 加权 KASVD 与变分层

对固定矩阵 M 与目标层 T , 定义局部代价

$$c_M(T) = \inf\{\|E\|_2 : \text{rank } E \leq 1, M + E \in T\}.$$

对于满秩矩阵，降低秩的最小代价为

$$c_M(R_2) = \sigma_3,$$

并由 $E = -\sigma_3 u_3 v_3^T$ 达到。反向从 rank two 到 rank three 的下确界代价为零：只要左右方向同时离开 column space 和 row space，就可以用任意小的非零扰动产生新的独立模态。

在 generic 区域

$$\Omega_{gen} = \{\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0\}$$

定义

$$V_K(M) = -\alpha_R \log m_R - \alpha_{12} \log m_{12} - \alpha_{23} \log m_{23}, \quad \alpha_i > 0,$$

以及库尔皮舍夫的作者性数学变分泛函

$$\mathcal{J}_K[M] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \|\dot{M}\|_F^2 + V_K(M) \right) dt.$$

对于单重奇异值， $\nabla \sigma_i = u_i v_i^T$ ，因此在 regular stratum 内形式 Euler-Lagrange 方程为

$$\ddot{M} = \nabla_F V_K(M).$$

命题 10.1. 良定的存在性设定

单独的对数屏障在无界矩阵空间上不是 coercive。然而在紧的安全区域

$$\Omega_\delta = \{M : \|M\|_F = 1, m_R, m_{12}, m_{23} \geq \delta\}$$

上，只要允许轨迹集合非空，有限维离散 fixed-endpoint 泛函就能达到最小值。

证明。 Ω_δ 紧，其有限直积紧；fixed-endpoint 允许集闭；离散泛函连续。因此应用 Weierstrass 定理。□

11. Prospective certificate 与经验主张边界

KLT-RBD 中已经构造如下计算链：

Source $\rightarrow$ Intake $\rightarrow$ Evidence-D $\rightarrow G_t \rightarrow M_t \rightarrow$ SVD $\rightarrow$ Transition $\rightarrow$ Certificate\ABSTAIN.

Append-only ledger、hash-bound materialization、blind split 与 scoring protocol 使计算可复现，但它们本身并不是预测能力的证据。项目中的 synthetic tests 用于检查模型可执行性，而不是替代真实 holdout。本文准备时尚未完成 real prospective validation，因此经验预测性主张不属于本文的已证明层。

12. 新颖性与限制

以下内容属于经典数学，不作为作者性发现主张：SVD、秩不等式、Eckart-Young-Mirsky 定理、标准扰动界、既有的 Lie/Malcev/Binary-Lie/Sagle 理论以及紧性论证。

本文中伊万·鲍里索维奇·库尔皮舍夫的作者性数学构造包括：

1. 从有限 Reper Artifact 图到三通道算子 M_A 以及 KASVD 护照的映射；
2. KASVD 分层作为 KLT-RBD 状态层以及其 rank-one 操作解释；
3. 以同一矩阵 M 作为 Artifact 算子与族 A_M 的共同模块；
4. 族 A_M 的显式刚性定理，包括九个 Binary-Lie witnesses 与九个 Sagle witnesses；
5. weighted KASVD 与泛函 $\mathcal{J}_K$ ；
6. computed certificate 与 truth-status 的严格分离原则。

尚未解决的问题包括：带离散分量的 A_M 完整同构群、重奇异值附近 KASVD 模空间的全局几何，以及 prospective prediction layer 的独立真实验证。

13. 结论

本文获得了一个统一而严格的矩阵层：同一个 3×3 矩阵承载两种不同结构，即 Reper Artifact 算子的谱状态以及七维反交换代数的混合中心块。SVD 比值 (s_2, s_3) 构成这两个构造的共同不变量。对于代数族证明了刚性：任何非零 M 都使 A_M 同时离开 Binary-Lie、Malcev 与 Sagle 类。对于 Artifact 层，得到了精确的 rank-one 距离与安全谱阈值。变分层提供一个数学轨迹模型，而其经验解释仍属于独立的 prospective verification 问题。

附录 A. 九个 Binary-Lie witnesses

对 $i, j \in \{1, 2, 3\}$ 任取 $k \neq j$ ，令

$$x = f_k, \quad y = e_i - f_j.$$

则

$$J(x, y, [x, y]) = M_{ij}h.$$

例如可固定 $k(1) = 2$ 、 $k(2) = 3$ 、 $k(3) = 2$ ，由此得到针对 M 全部元素的九个确定性检验。

附录 B. 九个 Sagle witnesses

令 $\mathcal{S}(x, y, z, w)$ 表示把 Sagle 恒等式全部移到同一侧所得的缺陷。定理 8.3 中的九个四元组在中心坐标 h 上依次产生

$$M_{11}, M_{12}, M_{13}, -M_{21}, -M_{22}, -M_{23}, -M_{31}, M_{32}, -M_{33}.$$

因此 Sagle 恒等式逐一消去 M 的每个坐标。

参考文献

1. Kaygorodov, I.; Zusmanovich, P. On anticommutative algebras for which $[R_a, R_b]$ is a derivation. *Journal of Geometry and Physics* **166** (2021), 104113. DOI: 10.1016/j.geomphys.2021.104113.
2. Sagle, A. A. On simple extended Lie algebras over fields of characteristic zero. *Pacific Journal of Mathematics* **15**(2) (1965), 621-648.
3. Stewart, G. W.; Sun, J.-G. *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press, 1990.
4. Horn, R. A.; Johnson, C. R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
5. Eckart, C.; Young, G. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika* **1** (1936), 211-218.
6. Mirsky, L. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. *Quarterly Journal of Mathematics* **11** (1960), 50-59.
7. Kurpishev, I. B. *Basic Project KLT-RBD, Volume V: typed graph, provenance, versioning and audit mathematics*. Project corpus, 2026.
8. Kurpishev, I. B. *R3-Y Theorematic Consolidation and R4-A/R4-B Rigidity Packages*. LOGIC OF KURPISHEV 2 project corpus, 2026.