

Спектральная геометрия KASVD и семимерные антикоммутативные алгебры

Матричный мост для реперных артефактов KLT-RBD

Иван Борисович Курпишев

Калининград, 2026

Аннотация

Строится строгий математический слой, связывающий конечный типизированный граф реперного артефакта с матрицей $M \in M_3(\mathbb{R})$, ее сингулярным спектром и стратифицированным пространством состояний KASVD. Параллельно рассматривается семимерная антикоммутативная алгебра

$$A_M = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}h,$$

в которой та же матрица M задает смешанный центральный билинейный блок. Доказываются инвариантность нормализованного SVD-паспорта, rank-gap утверждение, критерий рождения ранга при rank-one обновлении, точное rank-one edit distance, формула размерности алгебры дериваций, а также жесткость относительно классов Binary-Lie, Malcev и Sagle:

$$A_M \in \text{BinaryLie} \iff A_M \in \text{Malcev} \iff A_M \in \text{Sagle} \iff M = 0.$$

Вводится авторский вариационный функционал Курпишева на безопасной спектральной области. Отдельно формулируется математическая граница между доказанным спектрально-алгебраическим слоем и prospective/blind инфраструктурой KLT-RBD. Эмпирическая предсказательная валидация в данной статье не является.

Ключевые слова: KASVD; KLT-RBD; Reper; сингулярное разложение; антикоммутативная алгебра; Binary-Lie; Malcev; Sagle; rank-one perturbation; вариационный принцип.

MSC 2020: 17A30, 15A18, 15A60, 65F35.

1. Введение

В проекте “ЛОГИКА КУРПИШЕВА 2” реперный объект записывается как $\text{Reper} = (R, I, U; D)$, а KLT-RBD используется как машинно-проверяемая память источни-

ков, оснований, переходов, блокеров и статусов. Настоящая статья выделяет из этого корпуса самостоятельную математическую задачу: построить небольшой матричный носитель структуры, на котором можно строго различать ранг, спектральную симметрию, устойчивость к возмущениям и допустимые элементарные переходы.

Центральный объект статьи - матрица $M \in M_3(\mathbb{R})$. Она возникает двумя независимыми способами. Во-первых, как оператор, собранный из типизированных ребер конечного Artifact-графа. Во-вторых, как смешанный билинейный блок семимерной антикоммутативной алгебры A_M . Эти два уровня не отождествляются семантически. Их математическая связь состоит в общем SVD-инварианте.

Классическая часть статьи опирается на сингулярное разложение, теорему Эккарта-Янга-Мирского, стандартные оценки возмущений сингулярных чисел и известные определения классов Binary-Lie, Malcev и Sagle [1-6]. Авторская часть - Artifact-to-KASVD construction, KASVD state stratification и автомат переходов, применение одной матрицы M как связующего модуля для Artifact-оператора и A_M , а также вариационный функционал $\mathcal{J}_K$.

2. Artifact-оператор и KASVD

Определение 2.1. Матрица артефакта

Пусть $G_A = (V_A, E_A, \tau, w)$ - конечный типизированный взвешенный граф. Фиксируем ортонормированные трехмерные пространства

$$X = \text{span}\{R, I, U\}, \quad Y = \text{span}\{D, P, G\}.$$

Здесь P и G являются аналитическими каналами proof/evidence и gap/blocker и не объявляются дополнительными компонентами Reper. Каждому ребру e сопоставим $x_e \in X$, $y_e \in Y$ и вес $w(e)$. Определим

$$T_A = \sum_{e \in E_A} w(e) x_e \otimes y_e, \quad M_A = [T_A] = \sum_{e \in E_A} w(e) x_e y_e^T.$$

Определение 2.2. KASVD-паспорт

Пусть $M \neq 0$ и

$$\sigma_1(M) \geq \sigma_2(M) \geq \sigma_3(M) \geq 0$$

Эти величины являются его сингулярными числами. Положим

$$\rho(M) = \|M\|_F, \quad s_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad s_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}.$$

Тройку

$$\text{SpecRep}(M) = (\rho; s_2, s_3)$$

назовем спектральным паспортом, а (s_2, s_3) - KASVD-точкой. Она лежит в замкнутом треугольнике

$$0 \leq s_3 \leq s_2 \leq 1.$$

Предложение 2.3. Инвариантность формы

При преобразовании

$$M \mapsto cAMB^T, \quad A, B \in O(3), \quad c \neq 0,$$

KASVD-точка (s_2, s_3) сохраняется, а ρ умножается на $|c|$.

Доказательство. Ортогональные множители не меняют сингулярные числа, а умножение на c умножает все сингулярные числа на $|c|$. Отношения к σ_1 неизменны. $\square$

Теорема 2.4. Rank-гар

Если активные ребра Artifact-графа используют не более двух независимых входных направлений в X или не более двух независимых выходных направлений в Y , то

$$\text{rank } M_A \leq 2, \quad \sigma_3(M_A) = 0.$$

Доказательство. В первом случае область существенного действия T_A имеет размерность не более двух; во втором случае образ T_A лежит в подпространстве размерности не более двух. В обоих случаях ранг не превосходит двух. $\square$

Обратное утверждение неверно: $\sigma_3 = 0$ может возникать из линейной зависимости или компенсации весов. Поэтому semantic gap, structural gap и spectral gap должны храниться отдельно.

3. Rank-one динамика

Пусть

$$M' = M + E, \quad E = \alpha xy^T,$$

так что $\text{rank } E \leq 1$.

Теорема 3.1. Критерий рождения ранга

Пусть $\text{rank } M = 2$, единичные векторы ℓ и r порождают соответственно $\ker M^T$ и $\ker M$. Тогда

$$\text{rank}(M + \alpha xy^T) = 3$$

тогда и только тогда, когда

$$\alpha \neq 0, \quad \ell^T x \neq 0, \quad y^T r \neq 0.$$

Доказательство. Rank-one обновление увеличивает ранг матрицы ранга два ровно тогда, когда новое левое направление не принадлежит $\text{Col } M$, а новое правое направление не принадлежит $\text{Row } M$. Для коразмерности один эти условия эквивалентны указанным ненулевым скалярным произведениям. $\square$

Теорема 3.2. Ограничение на изменение ранга

Для rank-one обновления

$$|\text{rank}(M + E) - \text{rank } M| \leq 1.$$

Следовательно один elementary edge update не может перевести rank-one состояние непосредственно в rank-three состояние.

Теорема 3.3. Точное rank-one edit distance

Минимальное число rank-one слагаемых, необходимое для перехода от фиксированной матрицы M к фиксированной матрице N , равно

$$d_1(M, N) = \text{rank}(N - M).$$

Доказательство. Сумма k rank-one матриц имеет ранг не более k , откуда $k \geq \text{rank}(N - M)$. С другой стороны, SVD матрицы $N - M$ разлагает ее в сумму ровно $r = \text{rank}(N - M)$ rank-one слагаемых. $\square$

4. KASVD-стратификация и смежность

Для ненулевой 3×3 матрицы рассматриваются семь страт:

$$S_1, S_{2g}, S_{2e}, S_{3g}, S_{3,12}, S_{3,23}, S_{3i},$$

где индекс задает ранг, g означает попарно различные положительные сингулярные числа, e - равенство двух положительных сингулярных чисел при rank two, а 12, 23, i - соответствующие кратности в rank three.

Теорема 4.1. Экзистенциальная rank-one смежность

Для двух KASVD-страт существует хотя бы одна пара представителей $M \in S_\alpha$, $N \in S_\beta$ с

$$\text{rank}(N - M) \leq 1$$

тогда и только тогда, когда

$$|\text{rank } S_\alpha - \text{rank } S_\beta| \leq 1.$$

Доказательство. Необходимость следует из стандартного неравенства рангов. Для достаточности по рангам 1-2 используются диагональные представители $\text{diag}(a, 0, 0)$ и $\text{diag}(a, b, 0)$, включая $a = b$ при необходимости. Для переходов 2-3 диагональные представители закрывают generic и double strata; переход $S_{2g} \rightarrow S_{3i}$ реализуется, например, как $I - uv^T \rightarrow I$ при $u = e_1$, $v = e_1 + e_2$, причем $I - uv^T$ имеет сингулярные числа $(\sqrt{2}, 1, 0)$. Внутри rank-three блока прямые rank-one примеры получают изменением одной диагональной координаты; переход $S_{3i} \rightarrow S_{3g}$ реализуется матрицей $I + e_1(e_1 + e_2)^T$, имеющей три различные сингулярные величины. Обратные стрелки получаются заменой E на $-E$. $\square$

Теорема является утверждением о существовании представителей. Для конкретных M и N правильным критерием остается $d_1(M, N) = \text{rank}(N - M)$.

5. Спектральная устойчивость

Для возмущения $M' = M + E$ стандартная оценка сингулярных чисел дает [3,4]

$$|\sigma_k(M') - \sigma_k(M)| \leq \|E\|_2.$$

В generic full-rank страте положим

$$m_R = \sigma_3, \quad m_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad m_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},$$

и

$$r_{\text{safe}}(M) = \min\{m_R, m_{12}, m_{23}\}.$$

Следствие 5.1. Safe-radius гарантия

Если

$$\|E\|_2 < r_{\text{safe}}(M),$$

то $M + E$ остается full-rank и не пересекает поверхности $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\sigma_2 = \sigma_3$.

Для последовательности обновлений $E_1, \dots, E_n$ отсутствие промежуточного crossing гарантируется, например, более сильным условием

$$\sum_{j=1}^n \|E_j\|_2 < r_{\text{safe}}(M_0),$$

поскольку оно контролирует каждый prefix.

6. Семимерная антикоммутативная алгебра

Пусть

$$A_M = V \oplus W \oplus L, \quad V \cong W \cong \mathbb{R}^3, \quad L = \mathbb{R}h,$$

и определим антикоммутативное произведение

$$[(v, w, t), (v', w', t')] = (v \times v', w \times w', v^T M w' - v'^T M w).$$

Вектор h является центральным аннулятором. При $M = 0$ имеем Lie-алгебру

$$A_0 \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}h.$$

При $M \neq 0$ смешанный блок, вообще говоря, нарушает Jacobi identity.

Предложение 6.1. Ориентационно сохраняющая SVD-эквивалентность

Если $A, B \in SO(3)$ и центральная координата перенормируется ненулевым множителем, то смешанный блок преобразуется в

$$M \mapsto cAMB^T, \quad c \neq 0.$$

Следовательно (s_2, s_3) является инвариантом этой эквивалентности.

Важно, что Artifact-оператор допускает более широкое действие $O(3) \times O(3)$, тогда как cross product естественно эквивариантен относительно $SO(3)$. Поэтому общим объектом двух уровней являются SVD-инварианты, а не тождество полных групп преобразований.

7. Деривации

Теорема 7.1. Стабилизатор смешанного блока

Пусть $M \neq 0$. Любая деривация A_M индуцирует на $V \oplus W$ блок $P \oplus Q$, где

$$P, Q \in \mathfrak{so}(3),$$

и выполняется

$$PM = MQ.$$

Если положительные сингулярные значения M имеют кратности m_α , а

$$k = \dim \ker M,$$

то

$$\dim \text{Der}(A_M) = \sum_{\alpha} \binom{m_{\alpha}}{2} + k(k-1).$$

Доказательство. Аннулятор L характеристичен. На факторе $A_M/L \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ индуцированная деривация внутренняя, поэтому задается $P, Q \in \mathfrak{so}(3)$. Совместимость с центральной формой имеет вид $cM = -PM + MQ$. Скалярное произведение Фробениуса с M дает $c\|M\|_F^2 = 0$, поскольку следы $\text{tr}(M^T PM)$ и $\text{tr}(M^T MQ)$ равны нулю для кососимметричных P, Q . Значит $c = 0$. После SVD уравнение $PM = MQ$ распадается по блокам равных положительных сингулярных значений и по ядру. Каждый положительный блок кратности m_α дает $\binom{m_\alpha}{2}$ параметров, а два независимых кососимметричных блока в k -мерном ядре дают $2\binom{k}{2} = k(k-1)$. $\square$

8. Binary-Lie, Malcev и Sagle: жесткость семейства

Пусть

$$J(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$$

Эта величина называется якобиатором.

Теорема 8.1. Binary-Lie rigidity

Для семейства A_M

$$A_M \in \text{BinaryLie} \iff M = 0.$$

Доказательство. В антикоммутативной записи Binary-Lie identity эквивалентна [1,2]

$$J(x, y, [x, y]) = 0.$$

Для каждого $i, j \in \{1, 2, 3\}$ выбираем любой $k \neq j$ и полагаем

$$x = f_k, \quad y = e_i - f_j.$$

Прямой расчет дает

$$J(x, y, [x, y]) = M_{ij}h.$$

Следовательно все девять коэффициентов M_{ij} равны нулю. Обратно, $M = 0$ дает Lie-алгебру A_0 , а всякая Lie-алгебра является Binary-Lie. $\square$

Следствие 8.2. Malcev rigidity

$$A_M \in \text{Malcev} \iff M = 0.$$

Доказательство. Всякая Malcev-алгебра является Binary-Lie [1,2]. Применяем теорему 8.1; обратное направление следует из Lie-случая $M = 0$. $\square$

Теорема 8.3. Sagle rigidity

Пусть Sagle identity записано в форме [1]

$$[J(x, y, z), w] = J(w, z, [x, y]) + J(w, y, [z, x]) + J(w, x, [y, z]).$$

Тогда

$$A_M \in \text{Sagle} \iff M = 0.$$

Доказательство. Введем Sagle-defect

$$\mathcal{S}(x, y, z, w) = [J(x, y, z), w] - J(w, z, [x, y]) - J(w, y, [z, x]) - J(w, x, [y, z]).$$

Для стандартных базисов e_1, e_2, e_3 пространства V и f_1, f_2, f_3 пространства W прямое вычисление дает таблицу:

коэффициент	(x, y, z, w)	$\mathcal{S}(x, y, z, w)$
M_{11}	(e_1, e_2, f_1, e_2)	$M_{11}h$
M_{12}	(e_1, e_2, f_2, e_2)	$M_{12}h$
M_{13}	(e_1, e_2, f_3, e_2)	$M_{13}h$
M_{21}	(e_1, e_2, f_1, e_1)	$-M_{21}h$
M_{22}	(e_1, e_2, f_2, e_1)	$-M_{22}h$
M_{23}	(e_1, e_2, f_3, e_1)	$-M_{23}h$
M_{31}	(e_1, e_2, f_2, f_3)	$-M_{31}h$
M_{32}	(e_1, e_2, f_1, f_3)	$M_{32}h$
M_{33}	(e_1, e_2, f_1, f_2)	$-M_{33}h$

Если A_M является Sagle-алгеброй, каждый дефект равен нулю; следовательно $M_{ij} = 0$ для всех i, j . Обратно, $M = 0$ дает Lie-алгебру, а Lie-алгебры удовлетворяют Sagle identity. $\square$

Таким образом внутри семейства A_M три более широких неассоциативных класса схлопываются к единственному Lie-слою:

$$A_M \in \text{BinaryLie} \iff A_M \in \text{Malcev} \iff A_M \in \text{Sagle} \iff M = 0.$$

9. Общий SVD-модульный мост

Теорема 9.1. Artifact/KASVD - A_M bridge

Пусть одна и та же ненулевая матрица M используется

1. как матрица Artifact-оператора $T_A : X \rightarrow Y$;
2. как смешанный центральный блок антикоммутативной алгебры A_M .

Тогда нормализованный спектр

$$(s_2, s_3) = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right)$$

является общим инвариантом ортогонально-масштабной геометрии Artifact-оператора и ориентационно сохраняющей ортогонально-масштабной эквивалентности алгебраического смешанного блока.

Доказательство. На Artifact-уровне сингулярные отношения инвариантны относительно $O(3) \times O(3)$ и ненулевого общего масштаба. На алгебраическом уровне допустимое непрерывное базисное действие содержит $SO(3) \times SO(3)$ и тот же ненулевой масштаб центральной координаты. В обоих случаях сингулярные числа меняются лишь общим множителем, поэтому их отношения совпадают. $\square$

Теорема не утверждает, что семантический Artifact является алгеброй. Она утверждает только существование строгого общего матричного инварианта.

10. Взвешенный KASVD и вариационный слой

Для фиксированной матрицы M и целевой страты T определим локальную стоимость

$$c_M(T) = \inf\{\|E\|_2 : \text{rank } E \leq 1, M + E \in T\}.$$

Для full-rank матрицы минимальная стоимость потери ранга равна

$$c_M(R_2) = \sigma_3,$$

что достигается при $E = -\sigma_3 u_3 v_3^T$. В обратном направлении из rank two в rank three инфимальная стоимость равна нулю: новая независимая мода может быть создана сколь угодно малым ненулевым возмущением, направленным одновременно вне column и row spaces.

На generic области

$$\Omega_{gen} = \{\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0\}$$

введем

$$V_K(M) = -\alpha_R \log m_R - \alpha_{12} \log m_{12} - \alpha_{23} \log m_{23}, \quad \alpha_i > 0,$$

и авторский математический вариационный функционал Курпишева

$$\mathcal{J}_K[M] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \|\dot{M}\|_F^2 + V_K(M) \right) dt.$$

Для простых сингулярных чисел $\nabla \sigma_i = u_i v_i^T$, поэтому внутри regular stratum формальное уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\ddot{M} = \nabla_F V_K(M).$$

Предложение 10.1. Корректная existence-постановка

Сам логарифмический барьер не коэрцитивен на неограниченном пространстве матриц. Однако на компактной безопасной области

$$\Omega_\delta = \{M : \|M\|_F = 1, m_R, m_{12}, m_{23} \geq \delta\}$$

конечномерный дискретный fixed-endpoint функционал достигает минимума, если множество допустимых траекторий непусто.

Доказательство. Ω_δ компактно, конечное произведение его копий компактно, допустимое fixed-endpoint множество замкнуто, а дискретный функционал непрерывен. Применяется теорема Вейерштрасса. $\square$

11. Prospective certificate и граница эмпирических утверждений

Для KLT-RBD был построен вычислительный контур

Source $\rightarrow$ Intake $\rightarrow$ Evidence-D $\rightarrow G_t \rightarrow M_t \rightarrow$ SVD $\rightarrow$ Transition $\rightarrow$ Certificate $\vee$ ABSTAIN.

Append-only ledger, hash-bound materialization, blind split и scoring protocol обеспечивают воспроизводимость вычисления, но не являются доказательством предсказательной силы. Synthetic tests в проекте используются как проверка исполнимости модели, а не как замена real holdout. В момент подготовки статьи real prospective validation не выполнена; поэтому все эмпирические claims остаются за пределами доказанного слоя.

12. Новизна и ограничения

Классическими и не заявляемыми как авторская новизна являются SVD, rank inequalities, Eckart-Young-Mirsky, стандартные perturbation bounds, свойства Lie/Malcev/Binary-Lie/Sagle и компактные аргументы.

К авторской математической конструкции И.Б. Курпишева в данной статье относятся:

1. отображение конечного реперного Artifact-графа в трехканальный оператор M_A и KASVD-паспорт;
2. KASVD-стратификация как слой состояния KLT-RBD и ее operational rank-one interpretation;
3. использование одной матрицы M как общего модуля Artifact-оператора и семейства A_M ;
4. явные rigidity theorems для семейства A_M , включая девять Binary-Lie и девять Sagle witnesses;
5. weighted KASVD и функционал $\mathcal{J}_K$;
6. принцип строгого разделения computed certificate и truth-status.

Открытыми остаются полный isomorphism group A_M с дискретными компонентами, глобальная геометрия KASVD-модулей около кратных сингулярных значений и независимая реальная проверка prospective prediction layer.

13. Заключение

Получен единый строгий матричный слой, в котором одна и та же 3×3 матрица несет две разные структуры: спектральное состояние реперного Artifact-оператора и смешанный центральный блок семимерной антикоммутативной алгебры. SVD-отношения (s_2, s_3) образуют общий инвариант этих конструкций. Для алгебраического семейства доказана жесткость: любой ненулевой M выводит A_M одновременно из классов Binary-Lie, Malcev и Sagle. Для Artifact-слоя получены точные rank-one расстояния и безопасные спектральные пороги. Вариационный слой задает математическую модель траекторий, но его эмпирическая интерпретация остается отдельной задачей prospective verification.

Приложение А. Девять Binary-Lie witnesses

Для $i, j \in \{1, 2, 3\}$ выбирается любой $k \neq j$ и

$$x = f_k, \quad y = e_i - f_j.$$

Тогда

$$J(x, y, [x, y]) = M_{ij}h.$$

Например, можно фиксировать $k(1) = 2$, $k(2) = 3$, $k(3) = 2$; это дает девять детерминированных проверок всех элементов M .

Приложение В. Девять Sagle witnesses

Обозначим через $\mathcal{S}(x, y, z, w)$ левую часть Sagle identity, перенесенную в одну сторону. Девять указанных в теореме 8.3 четверок из стандартного базиса дают соответственно

$$M_{11}, M_{12}, M_{13}, -M_{21}, -M_{22}, -M_{23}, -M_{31}, M_{32}, -M_{33}$$

в центральной координате h . Поэтому Sagle identity уничтожает каждую координату M отдельно.

Литература

1. Kaygorodov, I.; Zusmanovich, P. On anticommutative algebras for which $[R_a, R_b]$ is a derivation. *Journal of Geometry and Physics* **166** (2021), 104113. DOI: 10.1016/j.geomphys.2021.104113.
2. Sagle, A. A. On simple extended Lie algebras over fields of characteristic zero. *Pacific Journal of Mathematics* **15**(2) (1965), 621-648.

3. Stewart, G. W.; Sun, J.-G. *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press, 1990.
4. Horn, R. A.; Johnson, C. R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
5. Eckart, C.; Young, G. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika* **1** (1936), 211-218.
6. Mirsky, L. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. *Quarterly Journal of Mathematics* **11** (1960), 50-59.
7. Kurpishev, I. B. *Basic Project KLT-RBD, Volume V: typed graph, provenance, versioning and audit mathematics*. Project corpus, 2026.
8. Kurpishev, I. B. *R3-Y Theorematic Consolidation and R4-A/R4-B Rigidity Packages*. LOGIC KURPISHEVA 2 project corpus, 2026.